

Skript<sup>1</sup> zur Vorlesung

Beschleuniger  
und  
Synchrotronstrahlungsquellen

gehalten im SS 04  
von

Prof. Dr. Erhard Steffens  
Physikalisches Institut II  
Universität Erlangen-Nürnberg

Ausgearbeitet von Johannes Kirscher

---

<sup>1</sup>nur zum privaten Gebrauch neben der Vorlesung

# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Einführung</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Vorbemerkung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Grundlegende Beschleunigertypen</b>	<b>4</b>
2.1	Elektrostatische Beschleuniger . . . . .	4
2.1.1	Gleichspannungsbeschleuniger . . . . .	4
2.1.2	Cockroft-Walton-Kaskadengenerator . . . . .	5
2.1.3	Van de Graaff- und Tandem-Van de Graaff-Beschleuniger . . . . .	5
2.2	Linearbeschleuniger, Linac ( <b>L</b> inear <b>A</b> ccelerator) . . . . .	7
2.3	Kreisbeschleuniger . . . . .	9
2.3.1	Klassisches Zyklotron . . . . .	9
2.3.2	Isochronzyklotron . . . . .	11
2.3.3	Microtron . . . . .	12
2.3.4	Betatron . . . . .	13
<b>II</b>	<b>Synchrotrons und Speicherringe</b>	<b>16</b>
<b>3</b>	<b>Übersicht, Einleitung</b>	<b>16</b>
<b>4</b>	<b>Collider, Speicherringe</b>	<b>16</b>
4.1	Physik der Teilchenkollision . . . . .	18
4.2	Ereignisraten . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Einführung Strahldynamik</b>	<b>20</b>
5.1	Schwache Fokussierung ( <i>weak focusing</i> WF) . . . . .	20
5.2	Synchrotron Magnete . . . . .	23
5.2.1	Allgemeines . . . . .	23
5.2.2	Berechnung statischer Magnetfelder bei Eisenpolen . . . . .	23
5.2.3	Dipolmagnet . . . . .	25
5.2.4	Quadrupolmagnet . . . . .	26
5.2.5	<i>Combined Function</i> Magnete . . . . .	28
5.2.6	Sextupolmagnet . . . . .	28
5.2.7	Allgemeine Multipol Entwicklung . . . . .	29
5.3	Teilchenbewegung in einem Kreisbeschleuniger . . . . .	30
5.3.1	Bewegungsgleichungen . . . . .	30
5.3.2	Fokussierungs, Betatronschwingungen . . . . .	31
5.3.3	Betafunktion $\beta(s)$ . . . . .	33
5.3.4	Phasenellipse und Emittanz . . . . .	35
5.3.5	Dispersion . . . . .	36
<b>6</b>	<b>Longitudinale Phasenstabilität</b>	<b>38</b>
<b>III</b>	<b>Synchrotronstrahlung</b>	<b>43</b>
<b>7</b>	<b>Strahlung beschleunigter nichtrelativistischer Teilchen</b>	<b>43</b>

<b>8</b>	<b>Strahlung beschleunigter relativistischer Teilchen</b>	<b>43</b>
8.1	Lineare Beschleunigung: $\frac{d\vec{v}}{d\tau} \parallel \vec{v}$ . . . . .	43
8.2	Kreisbeschleunigung: $\frac{d\vec{v}}{d\tau} \perp \vec{v}$ . . . . .	44
8.3	Winkelverteilung relativistischer Synchrotronstrahlung . . . . .	45
<b>9</b>	<b>Erzeugung von Synchrotronstrahlung in Speicherringen</b>	<b>46</b>
9.1	Undulatoren und Wiggler . . . . .	47
9.2	Wiggler- / Undulatorfeld . . . . .	47
9.3	Bewegungsgleichung im Wiggler/Undulator . . . . .	48
9.4	Brillanz und Leuchtdichte . . . . .	51

## Teil I

# Einführung

## 1 Vorbemerkung

Die Erforschung der Grundbausteine der Materie und der zwischen ihnen wirkenden Kräfte ist eines der wichtigsten und interessantesten Felder der Physik. Da man sich dabei in Dimensionen von weniger als  $10^{-15}\text{m}$  bewegt, sind hochenergetische Teilchenstrahlen eine Grundvoraussetzung der experimentellen Forschung. Hochenergetisch deshalb, da man zum auflösen einer Struktur (mit hinreichender Ortsschärfe) durch Streuung einer Welle allgemein eine Wellenlänge benötigt, die klein ist gegen die Ausmaße der Struktur. Für Teilchenstrahlen gilt die *de Broglie* Beziehung

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{E} \quad (1.1)$$

wobei die Energie  $E$  üblicherweise in Elektronenvolt (kinetische Energie, die ein Teilchen mit Elementarladung  $e = 1.602 \cdot 10^{-19}\text{C}$  beim durchlaufen einer Potentialdifferenz von  $\Delta U = 1\text{V}$  gewinnt) angegeben wird.

Neben der Auflösung kleiner Strukturen lassen sich mit Teilchenstrahlen auch "neue" Teilchen erzeugen, was aus der wohlbekannteren Beziehung

$$E = mc^2 \quad (1.2)$$

hervorgeht. Die Energie der Teilchen, die das neue Teilchen bilden, muss dabei immer höher sein (wegen Impulserhaltung) als die Ruheenergie des neuen Teilchens. Da z.B. das Top Quark eine sehr hohe Ruheenergie von  $E_0 = 174\text{GeV}$  hat, müssen entsprechend hohe Energien im Schwerpunktsystem der Stoßpartner bereitgestellt werden.

Zur Beschleunigung (Impulsänderung) von Teilchen muss allgemein eine Kraft wirken. Die einzige elementare Kraft, die sich eignet, ist die Elektromagnetische. Sie besitzt eine im Vergleich zu den anderen (schwache und starke Kraft, Gravitation) eine geeignete Reichweite ( $\infty$ ) und relative Stärke ( $\alpha_{el} = 1/137$  vgl.  $\alpha_{grav} = 6 \cdot 10^{-39}$ ).

Die *Lorentzkraft*

$$\vec{F} = e(\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E}) \quad (1.3)$$

ist die Kraft die auf ein Teilchen wirkt, das sich mit der Ladung  $e$  und Geschwindigkeit  $\vec{v}$  an einem Punkt mit dem elektrischen Feld  $\vec{E}$  und dem magnetischen Feld  $\vec{B}$  bewegt.

Verschiebt es sich von  $\vec{r}_1$  nach  $\vec{r}_2$  so ändert sich seine Energie um

$$\Delta E = e \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E}) d\vec{r} . \quad (1.4)$$

Da  $(\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{r} = 0$ , trägt das magnetische Feld nicht zur Energieänderung bei und es folgt

$$\Delta E = e \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} d\vec{r} = eU , \quad (1.5)$$

wobei  $U$  die durchlaufene Spannung ist. Das Magnetfeld wird deshalb nicht zur Beschleunigung, sondern nur zur Ablenkung und Fokussierung des Strahls verwendet. Ein großer Teil der Vorlesung wird sich mit den Problemen der Beschleunigung und Strahlführung beschäftigen.

## 2 Grundlegende Beschleunigertypen

Die Entwicklung von Maschinen zur Beschleunigung von Teilchen begann in den 20er Jahren des 20. Jahrhunderts. Im folgenden Kapitel soll ein kleiner Überblick der verschiedenen Typen gegeben werden.

### 2.1 Elektrostatische Beschleuniger

#### 2.1.1 Gleichspannungsbeschleuniger

Zunächst soll das einfachste Modell eines Teilchenbeschleunigers erklärt werden. Eine Teilchenquelle emittiert dabei die zu beschleunigenden Teilchen. Diese werden zwischen zwei Elektroden durch eine angelegte Spannung  $U$  in einem konstanten elektrischen Feld beschleunigt, legen eine feldfreie Driftstrecke zurück und treffen am Ende auf das *target*. Der Strahl muss im Vakuum verlaufen, um Stöße mit Gasmolekülen und damit Energieverlust zu vermeiden.

Ionenquelle und *target* liegen auf unterschiedlichem Potential mit der Differenz  $U$ . Im Idealfall ist die Teilchenenergie nur durch diese Spannung  $U$  begrenzt, störende Effekte wie Ionenstrom des Restgases oder der Ohmsche Stromfluss durch den Isolator können minimiert werden. Tatsächlich wird die Spannung und damit die Energie durch den Effekt der *Koronabildung* begrenzt. Ab einer gewissen Feldstärke ist das lokale Feld in der Umgebung der Elektroden so groß, dass in diesem Bereich entstandene Ionen so stark beschleunigt werden, sodass sie auf ihrem Weg durch Stöße weitere Ionen bilden. Es kommt dann zu einer lawinenartigen Vermehrung der Ladungsträger, der die Hochspannung zusammenbrechen lässt. Die Grenze für die maximal erreichbare Spannung liegt bei einigen MV. Diese Durchbruchspannung  $U_d$  ist proportional zur Vakuumgüte und damit zum Druck,  $U_d \propto p$ . Weiterhin spielen die Isolationseigenschaften des Gases eine Rolle, mit einem guten Isoliertgas ( $\text{SF}_6$ ,  $\text{CCl}_2$ ,  $\text{F}_2$ ) lassen sich viel höhere  $U_d$  erreichen als mit normaler Luft. Technisch einfacher zu realisieren ist es, die Aparatur in einem Drucktank voll Isoliertgas aufzubauen, als alles zu evakuieren. Ein wichtiger Parameter ist auch der Radius der Kugel, je größer der ist desto höher ist auch die Überschlagnspannung. Es war jedoch ein Problem, überhaupt erst solche Spannungen zu erzeugen.

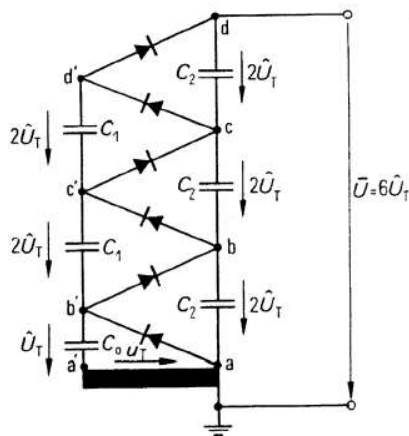


Abbildung 1: Kaskadenschaltung nach Walton

### 2.1.2 Cockroft-Walton-Kaskadengenerator

Eine Lösung wurde von Cockroft und Walton Anfang der 30er entwickelt. Die Funktionsweise ist in Abb. 1 dargestellt.

Die in Punkt A angelegte Wechselspannung  $U(t) = U_0 \sin \omega t$  lädt  $C_1$  auf  $U_0$  auf, da wegen der Diode an B keine negative Spannung ankommt.  $C_1$  liegt also auf der einen Seite auf  $+U_0$  und auf der anderen oszilliert die Spannung zwischen  $-U_0$  und  $+U_0$ . Am Punkt B pendelt die Spannung also zwischen 0 und  $2U_0$ . Die zweite Diode lädt  $C_2$  auf  $2U_0$  auf und damit oszilliert die Spannung zwischen C und A im Bereich von 0 und  $4U_0$ , usw... Ohne Belastung ist die maximal zu erreichende Endspannung also  $2nU_0$ , wobei  $n$  die Anzahl der Stufen angibt. Da sich die Kondensatoren immer etwas entladen, aufgrund eines Stromes  $I$  aus dem Generator, ist die real zu erreichende Spannung etwas geringer

$$U_{max} = 2U_0n - \frac{2\pi I}{\omega C} \left( \frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{12}n \right) . \quad (2.1)$$

Mit einem solchen Generator war es möglich, Spannungen bis 4 MV zu erreichen. Ein durch eine Kaskade versorgtes Tandem, wird auch als Dynamitron-Tandem (vgl. folgendes Kapitel) bezeichnet. Das an der Ruhr-Universität Bochum betriebene Dynamitron ([10]) erreicht z.B. Spannungen bis zu 4.5MV.

### 2.1.3 Van de Graaff- und Tandem-Van de Graaff-Beschleuniger

Robert Jemison Van de Graaff entwickelte 1930 einen Hochspannungsgenerator, dessen Prinzip in Abb. 2 zu sehen ist. Zunächst wird die Koronabildung ausgenutzt, um von einer spitzen Elektrode Ladungen auf ein Transportband aufzusprühen. Am anderen Ende des Bandes werden die Ladungen auf die zweite Elektrode, eine isolierte, leitende Hohlkugel, abgestreift. Die Hohlkugel lädt sich nun stetig, bis zu einer Grenzspannung ( $U_{max}^{Luft}(normal\ Bdg.) \approx 2MV$  vgl.  $U_{max}^{Isoliergas}(p \approx 1MPa) \approx 10MV$ ) auf. Verbunden ist die Kugel mit der ersten Elektrode des Beschleunigerrohres, die auch die Teilchenquelle enthält. Die eigentliche Beschleunigerstruktur besteht aus ringförmigen Elektroden, die neben ihrer beschleunigenden Wirkung zusätzlich den Strahl fokussieren. Die Elektroden sind durch Widerstände verbunden, um die Potentialdifferenz zwischen ihnen gleich zu halten und somit die Überschlagsgefahr durch Spannungsüberhöhung zu verringern.

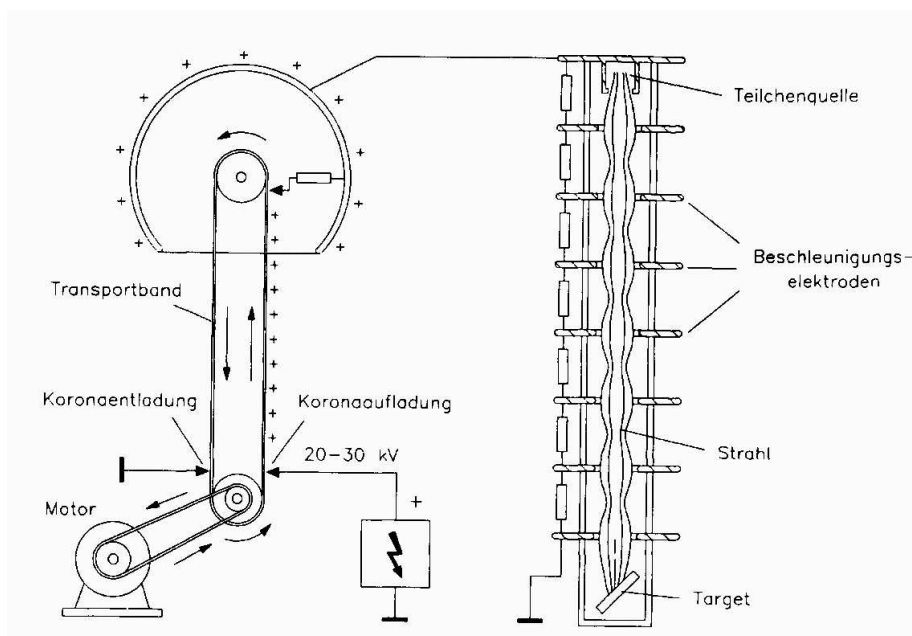


Abbildung 2: Van de Graaff Beschleuniger

Das Prinzip des *Tandem-Beschleunigers* ist in Abb. 3 dargestellt. Im Gegensatz zu ei-

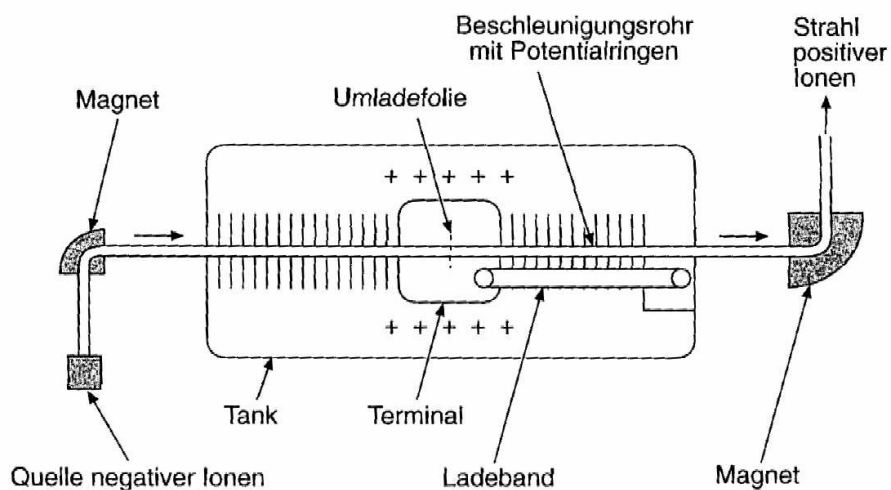


Abbildung 3: Tandem-Van de Graaff-Beschleuniger

nem normalen Van de Graaff-Beschleuniger wird die Beschleunigungsstrecke durch Ladungsumkehr der Teilchen 2-mal genutzt, was zu mindestens doppelt (entspr. höher wenn die Ionen nach der Umladung mehrfach positiv geladen sind) so hohen Energi-

en führt. Die aus dieser Quelle (Abb. 3, in meisten Fällen aber *Sputter-Ionenquelle*)



Abbildung 4: Der Erlanger Tandembeschleuniger

austretenden Ionen sind zunächst positiv geladen. In der ersten Umladestrecke werden durch Aufnahme von  $e^-$  einfach negativ geladene Ionen erzeugt. Die Hochspannung wird hier in der Mitte der Beschleunigungsstrecke angelegt, sodass die Ionen bis dort hin beschleunigt werden. Sie kommen nun zu einer Vorrichtung (Gasstripper, Folien) an der sie durch Stöße einige Elektronen wieder abstreifen, sich also positiv laden und somit ein zweites mal beschleunigt werden. Im Erlanger Tandem (Abb. 4) ist die maximal erreichbare Spannung ca. 5.5 MV.

## 2.2 Linearbeschleuniger, Linac (Linear Accelerator)

Alle bisher beschriebenen Gleichspannungsbeschleuniger haben das gleiche, die maximal Energie limitierende Problem der durch die hohen Spannungen ausgelösten Koronabildung. Ein Design, das diese Begrenzung nicht hat, wurde erstmals 1928 von Wideröe realisiert. Das Prinzip ist in Abb. 5 erklärt. Der Beschleuniger besteht aus einzelnen Driftröhren aus Metall, an die eine hochfrequente Wechselspannung ( $U(t) = U_0 \sin \omega t$ ) angelegt wird. Die Beschleunigung findet im Spalt zwischen den Röhren statt, während die Teilchen in den Röhren kein Feld spüren und somit von der Umpolung nichts mitbekommen und nur "driften". Nach  $n$  Röhren sollte ein Teilchen mit Ladung  $q$  also theoretisch die Energie

$$E_n = nqU_0 \sin \bar{\phi} \quad (2.2)$$

haben, wobei  $\bar{\phi}$  die mittlere Phase ist, die ein Teilchen beim passieren der Spalte sieht. Man erkennt, dass man mit einer relativ kleinen Spannung  $U_0$  sehr hohe Teilchenenergien erreichen kann, wenn man nur genügend viele Röhren hintereinander stellt. Da man aus technischen Gründen die Frequenz  $\nu$  (Periodendauer  $T$ ) der Spannung konstant halten will, muss man mit wachsender Geschwindigkeit den Abstand der Spalte erhöhen. Da sich die Spannung nach dem Durchlaufen der Driftstrecke gerade umgepolt haben soll, muss für die Driftzeit  $t$  gelten  $t = (2n + 1) \frac{T}{2}$ . Es folgt für den Abstand zwischen dem  $n$ -ten und  $n + 1$ -ten Spalt

$$l_n = \frac{v_n T}{2} = \frac{v_n \lambda}{2c} .$$

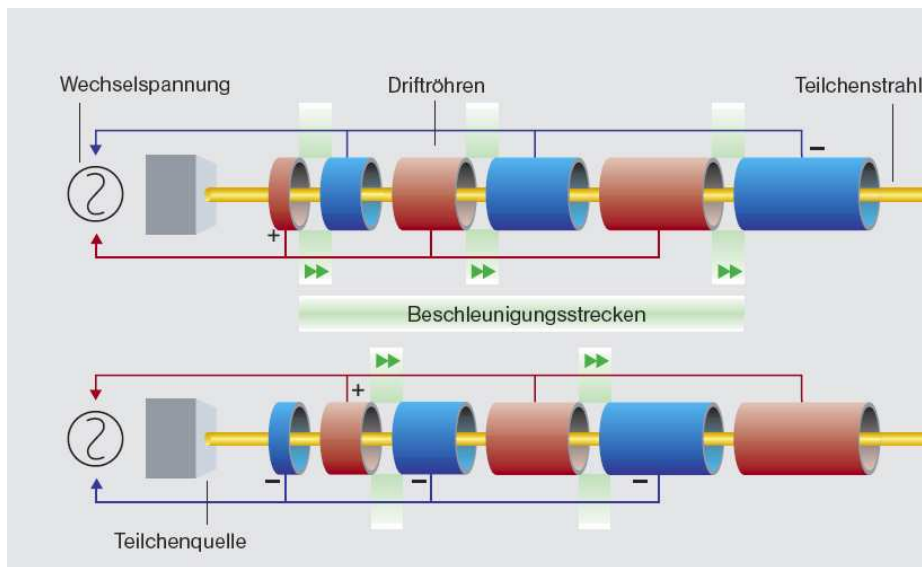


Abbildung 5: Prinzipieller Aufbau eines Linearbeschleunigers

Nimmt man nichtrelativistische Geschwindigkeiten an, folgt mit Gl. 2.2 und  $E_{kin} = \frac{1}{2}mv_n^2$

$$l_n = \frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{nqU_0 \sin \bar{\phi}}{2m}}. \quad (2.3)$$

Ein Problem, das bei der Beschleunigung existiert, ist die empfindliche Phasenabhängigkeit. Weicht die Geschwindigkeit auch nur wenig von der Idealgeschwindigkeit ab, so gerät das Teilchen aus der Phase und wird nicht mehr beschleunigt, wenn man zur Beschleunigung die maximale Spannung  $U_0$  (also die Phase  $\phi_s = \frac{\pi}{2}$ ) verwendet. Um zu schnelle Teilchen wieder auf Sollgeschwindigkeit abzubremesen und langsame stärker zu beschleunigen, muss man die Sollphase  $0 < \phi_s < \pi/2$  wählen (Abb. 6), sodass beim Linac die Beschleunigung bei ansteigender Spannung erfolgt.

Das Teilchen wird also nicht mehr mit der maximalen Spannung  $U_0$  beschleunigt, sondern mit einer geringeren  $U' = U_0 \sin \phi_s < U_0$ , dafür wird das Teilchen bei abweichender Geschwindigkeit auf die Sollgeschwindigkeit "zurückgedrückt". Angenommen das Teilchen ist zu schnell, so tritt es etwas zu früh in den Spalt ein, erfährt somit eine kleinere Beschleunigungsspannung als die anderen und wird somit relativ zum Rest gebremst. Analog werden zu langsame Teilchen mehr beschleunigt. Als Folge schwingen alle Teilchen im longitudinalen Phasenraum ( $p$ , Strahlrichtung) um die Sollphase  $\phi_s$ . Dieses Prinzip wird auch als *Phasenstabilität* bezeichnet und wird in Kap. 6 quantitativ behandelt.

In Elektronen-Linacs werden statt der Driftröhren Hohlraumresonatoren eingesetzt. Speziell bei Elektronen-Linacs kann man ausnutzen, dass schon bei relativ kleinen Energien (wenige MeV) die Geschwindigkeit kaum noch anwächst ( $v \approx c$ ), sondern nur noch die Masse. Dadurch haben die Hohlleiterstrukturen konstante Dimensionen und sind ergo sehr einfach zu bauen. Der größte Elektronenlinac im Stanford Linear Accelerator Center (SLAC) erreicht Endenergien von 50 GeV und ist über 3 km lang.



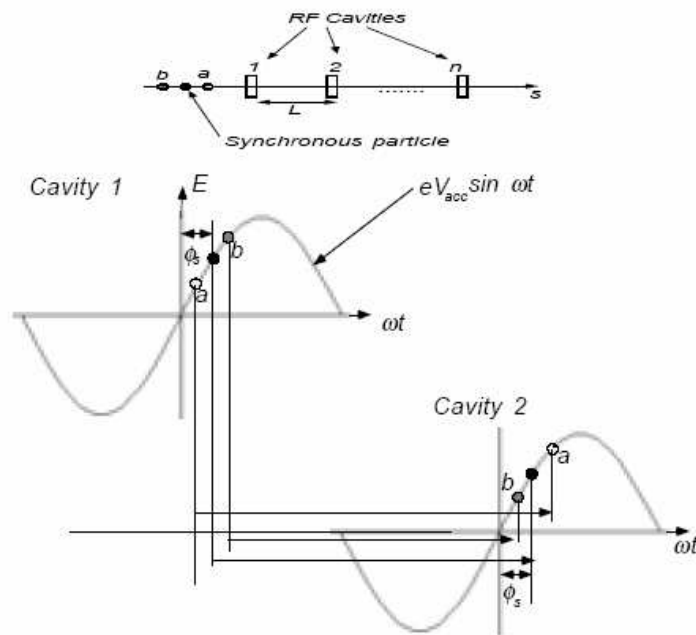


Abbildung 6: Prinzip Phasenstabilität: Der Beschleuniger ist so dimensioniert, dass er Teilchen mit Phase  $\phi_s$  ideal beschleunigt; diese Teilchen werden auch als synchrone Partikel bezeichnet; ein zu schnelles Teilchen kommt bei  $t_a < t_s$  an und wird weniger stark beschleunigt als das synchrone Teilchen;

## 2.3 Kreisbeschleuniger

Linacs können im Prinzip beliebig hohe Teilchenenergien erreichen, allerdings wächst die erforderliche Länge und damit der bauliche Aufwand entsprechend an. Geschickter wäre es, die Teilchen auf einer geschlossenen Bahn zu beschleunigen, um dadurch Beschleunigungsstrecken mehrfach zu nutzen, z.B. auf einem Kreis, wobei die Teilchen bei jedem Umlauf mehr Energie aufnehmen. Später (Kap. 8.2) wird man sehen, dass dieses Konzept bei Elektronen an eine Grenze, die durch den Energieverlust durch Synchrotronstrahlung gegeben ist, stößt. Bei schwereren Teilchen kann es bis zu höchsten Energien (LHC Beschleuniger am CERN:  $E_{\text{Strahl}} = 7 \text{ TeV}$  !) angewendet werden. Man teilt Kreisbeschleuniger allgemein nach der Zeitabhängigkeit des ablenkenden Magnetfeldes in zwei Kategorien ein:

- $B(t) = \text{const.}$  (z.B. klassisches Zyklotron)
- $B$  variabel mit  $t$  (Betatron, Synchrotron)

Der wichtige Fall des Synchrotrons wird in Teil II behandelt.

### 2.3.1 Klassisches Zyklotron

Der erste experimentell nutzbare Kreisbeschleuniger wurde 1932 von Lawrence und Livingston realisiert ( $E_{\text{max}} = 1.2 \text{ MeV}$ ). Das Prinzip ist in Abb. 7 erklärt. Das Ma-

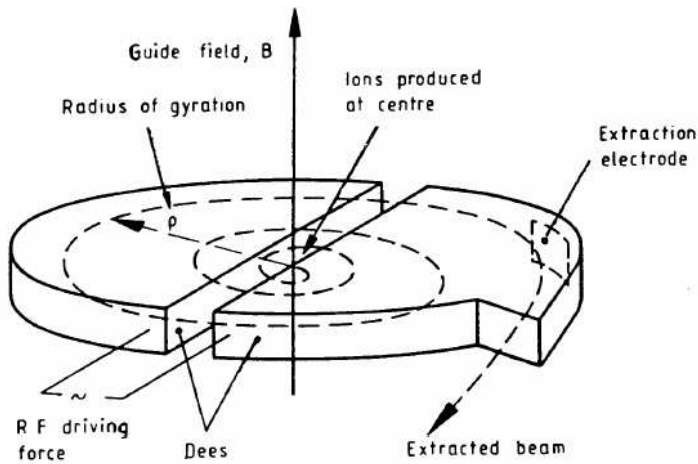


Abbildung 7: Prinzip des klassischen Zyklotrons

gnetfeld zwingt die Teilchen auf eine Bahn in der x-y Ebene, mit der Bewegungsgleichung

$$\dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = e\vec{v} \times \vec{B} .$$

Nimmt man an, dass die Bahn in der x-y Ebene verläuft und das B-Feld in z-Richtung zeigt, ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= ev_y B_z \\ \dot{p}_y &= -ev_x B_z . \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \ddot{v}_x + \frac{e^2}{m^2} B_z^2 v_x &= 0 \\ \ddot{v}_y + \frac{e^2}{m^2} B_z^2 v_y &= 0 , \end{aligned}$$

mit den wohlbekanntten Lösungen

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_0 \cos \omega_c t \\ v_y(t) &= v_0 \sin \omega_c t . \end{aligned}$$

Die Teilchen beschreiben also eine Kreisbahn zwischen den Polen mit der Zyklotronfrequenz

$$\omega_c = \frac{e}{m} B_z , \quad (2.4)$$

welche (bei nichtrelativistischem  $v$ ) nicht von der Teilchengeschwindigkeit abhängt. Diese Invarianz nutzt man aus, wenn man an die Pole die hochfrequente Beschleunigungsspannung, mit eben dieser Frequenz, anlegt ( $\omega_{hf} = \omega_c$ ). Wenn die Teilchen die Randbereiche der Apparatur erreichen, werden sie mit einem Ablenkkondensator oder einem Magnet ausgelenkt.

Das erste Zyklotron in Deutschland ging 1944 in Heidelberg in Betrieb. Das von *Bothe* und *Gentner* geleitete Projekt beschleunigte damals Deuteronen auf maximal  $E_{deut} = 10.5$  MeV, und ist heute im Deutschen Museum in München ausgestellt.

Bei höheren Energien muss man die relativistische Massenzunahme berücksichtigen. Steigt die Masse, erniedrigt sich  $\omega_c$ , entsprechend muss man auch  $\omega_{hf}$  herunterfahren.

Dieses Prinzip wird im *Synchrozyklotron* angewendet. Damit kann man zwar höhere Energien erreichen, jedoch lassen sich nur kurze Pulszüge mit geringer Intensität hochbeschleunigen. Ein Beispiel ist das inzwischen abgeschaltete 600 MeV Synchrozyklotron am CERN, mit einem Polschuhradius von 2.5 m, einem HF-Spektrum zwischen 30.1 MHz und 16.8 MHz und einer HF-Spannung  $U_{h.f} \approx 20kV$ . Neben Protonen wurden darin auch schwerere, mehrfach geladene Kerne (z.B.  $C_{12}^{4+}$ ) beschleunigt. Bei Elektronen kann man den Effekt der Massenzunahme nicht mehr durch Nachfahren der Frequenz kompensieren, da diese sehr schnell relativistische Energien erreichen ( $v \approx c$ ). Die Massenzunahme ist dann praktisch proportional zur Energiezunahme und die Zyklotronfrequenz sinkt umgekehrt proportional ab.

### 2.3.2 Isochronzyklotron

Eine weitere Möglichkeit, die relativistische Massenzunahme zu kompensieren, besteht darin, einen positiven Magnetfeldgradienten in radialer Richtung einzuführen ( $\frac{dB_z}{dr} > 0$ ) um  $\frac{B}{m(E)}$  und damit  $\omega_c$  konstant zu halten. Mit

$$\nabla \times \vec{B} = \vec{0}$$

gilt wegen der Rotationssymmetrie

$$\frac{\partial B_z}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial z} = 0 \rightarrow \text{für } \frac{\partial B_z}{\partial r} > 0 \text{ folgt } \frac{\partial B_r}{\partial z} > 0 .$$

Das Problem eines solchen Feldes ist, dass es vertikal defokussierend wirkt. Um das zu kompensieren, muss eine starke Fokussierung hinzukommen. Man erreicht das durch eine azimutale Feldvariation, welche man wiederum durch entsprechend geformte Pole erreicht (Ringzyklotron Abb. 8). Das weltgrößte Ringzyklotron ist am TRIUMF ([13]) in Vancouver, Kanada, in Betrieb. Kompaktzyklotrons (v.a. Spiralrücken-Zykl.) werden

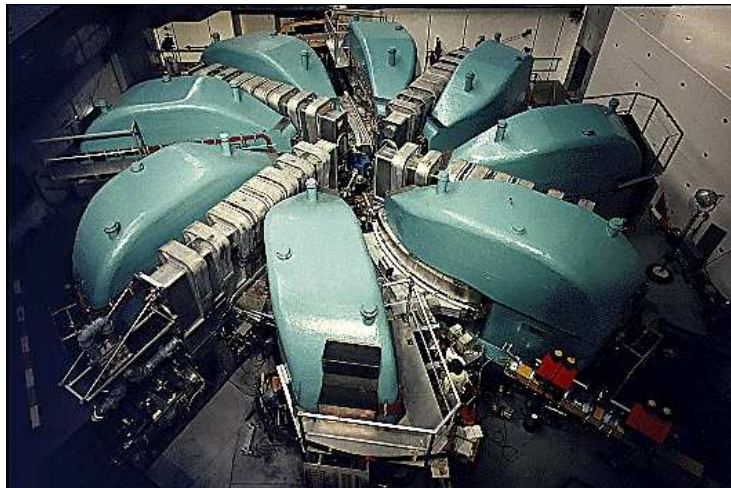


Abbildung 8: Ringzyklotron am Paul Scherrer Institut (Infos und Daten: [11])

heute vor allem in der Medizin eingesetzt:

- Bestrahlung mit Protonen (Protonentherapie)

- Produktion kurzlebiger Radioisotope für Bildgebende Verfahren (**Positron-Emissions-Tomografie**)

Einen umfassenden Überblick über aktuelle Anwendungen von Zyklotrons bietet die Zusammenfassung von Projekten auf der internationalen Zyklotronkonferenz 2001 (siehe [12]).

### 2.3.3 Microtron

Das Microtron ist ein Zyklotron für Elektronen. Dabei umgeht es das Problem der relativistischen Massenzunahme dadurch, dass der Energiegewinn der Elektronen bei jedem Umlauf so dimensioniert ist, dass die Teilchen immer die selbe Phase der beschleunigenden HF-Spannung sehen (Abb. 9). Die Umlaufstrecke verlängert sich da-

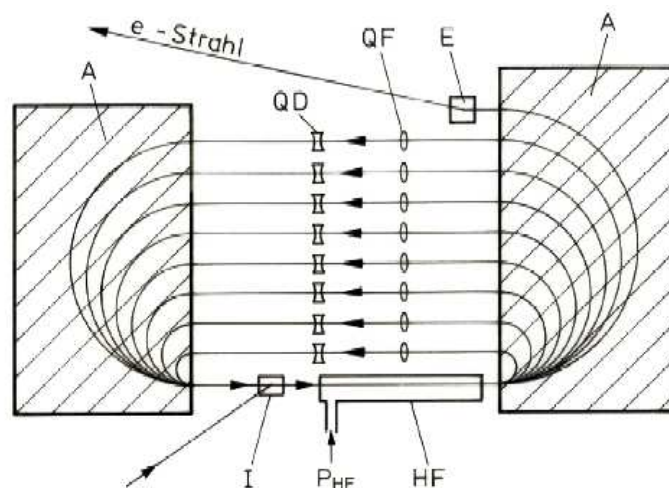


Abbildung 9: Prinzip eines *Racetrack*-Microtrons für Elektronen

bei immer um ein ganzzahliges Vielfaches der HF-Wellenlänge. Typische Werte für die HF-Frequenz sind  $\nu_{HF} = 3\text{GHz}$ .

Für den  $i$ -ten Umlauf benötigen die Elektronen

$$t_i = \frac{2(\pi R_i + l)}{v_i} , \quad (2.5)$$

wobei  $l$  die Distanz zwischen den Ablenkmagneten,  $R_i$  der Biegeradius und  $v_i$  die Geschwindigkeit der  $i$ -ten Bahn ist. Für den Biegeradius gilt

$$R_i = \frac{v_i m_i c^2}{ec^2 B} = \frac{v_i}{ec^2 B} E_i ; \quad (2.6)$$

Setzt man das in Gl. 2.5 ein und berechnet die Differenz

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i = \frac{2\pi}{ec^2 B} (E_{i+1} - E_i) = \frac{2\pi}{ec^2 B} \Delta E , \quad (2.7)$$

muss das gleich einem ganzzahligen Vielfachen  $n$  der Periodendauer der HF-Spannung sein,  $\Delta t = n/\nu_{HF}$ . Damit folgt für den erforderlichen Energiegewinn pro Umlauf

$$\Delta E = n \cdot \frac{ec^2 B}{2\pi\nu_{HF}} . \quad (2.8)$$

Eines der größten *Racetrack*-Microtrons ist an der Universität Mainz in Betrieb ([6]). Das **MA**inz-**MI**crotron (Abb. 10) ist mit  $l = 12.86\text{m}$ ,  $B \approx 1.3\text{T}$ , einem Magnetgewicht von  $450\text{t}$  und  $R_{max} \approx 2.2\text{m}$  ausgelegt für Energien bis zu  $E \approx 855\text{MeV}$ . In Bau befindet sich die nächste Ausbaustufe MAMI-C ([7]), mit der Elektronen bis auf  $1.5\text{ GeV}$  beschleunigt werden sollen.

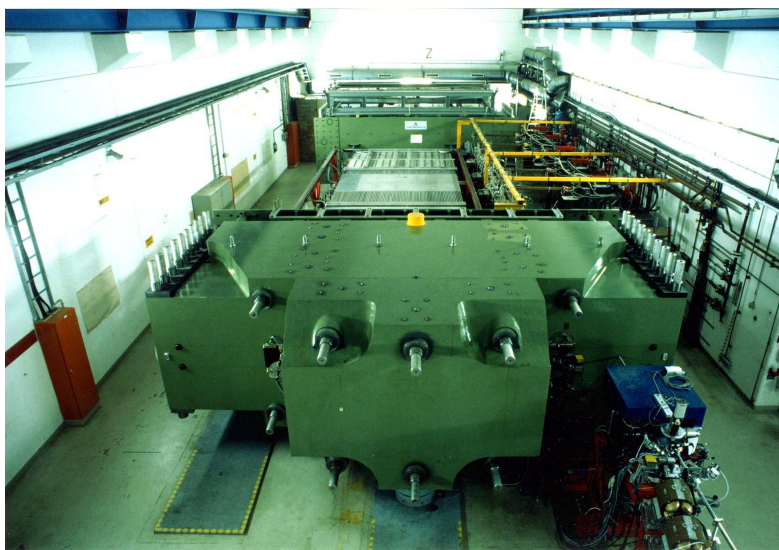


Abbildung 10: *Racetrack*-Microtron, RTM 3 MAMI B, der Univeristät Mainz

### 2.3.4 Betatron

Im Gegensatz zum Zyklotron bleibt der Teilchenbahnradius beim einem Betatron konstant. Um das zu erreichen, muss das Magnetfeld zeitlich ansteigen. Wegen

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} , \quad (2.9)$$

entsteht das beschleunigende elektrische Feld automatisch. Legt man das Magnetfeld senkrecht zur Teilchenbahn an, so wird durch dessen zeitliche Variation ein elektrisches Feld induziert, das in jedem, der als Kreis angenommenen Bahn, tangential liegt, und somit zur Beschleunigung geeignet ist (Abb. 11). Im folgenden soll eine Bedingung für den Betrieb eines Betatrons (konstante Teilchenbahn) hergeleitet werden. Nimmt man eine kreisförmige Teilchenbahn an (Abb. 12),

muss das B-Feld azimuthal konstant sein ( $\frac{\partial \vec{B}}{\partial \theta} = 0$ ), eine radiale Feldvariation ( $\frac{\partial \vec{B}}{\partial r} \neq 0$ ) soll dagegen zugelassen werden. Der mittlere Fluss durch die, von der Teilchenbahn

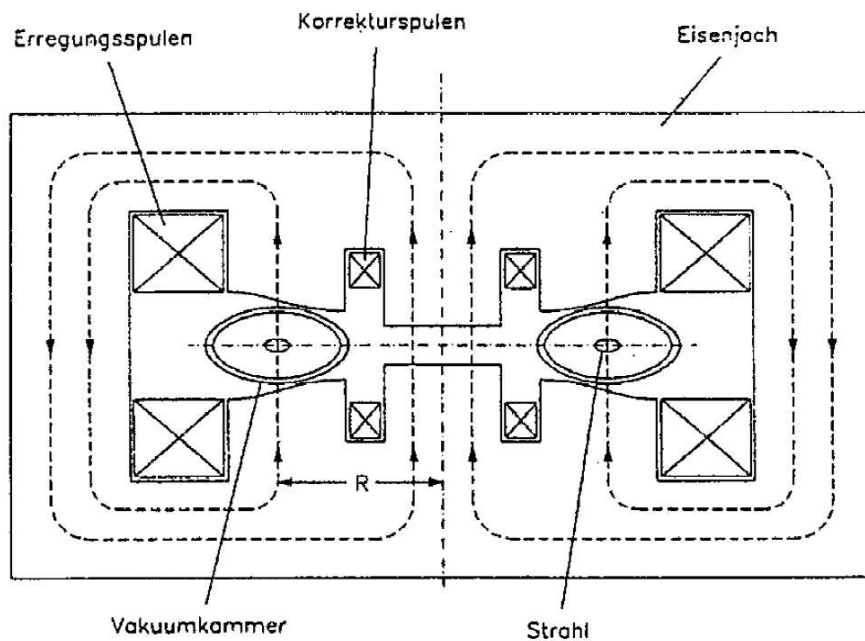


Abbildung 11: Querschnitt durch ein Betatron; um eine stabile Teilchenbahn zu erhalten, muss der mittlere Spalt enger sein als der Spalt in dem der Strahl verläuft;

umschlossene Fläche, beträgt

$$\langle |\vec{B}| \rangle = \frac{1}{\pi R^2} \int \int_A \vec{B}(r) d\vec{f} .$$

Schreibt man Gl. 2.9 in integraler Form und beachtet, dass wegen der Rotationssymmetrie  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial \theta} = 0$  gelten muss erhält man

$$2\pi R |\vec{E}| = -\pi R^2 \frac{d}{dt} \langle |\vec{B}| \rangle \implies |\vec{E}| = -\frac{R}{2} \langle \dot{|\vec{B}|} \rangle .$$

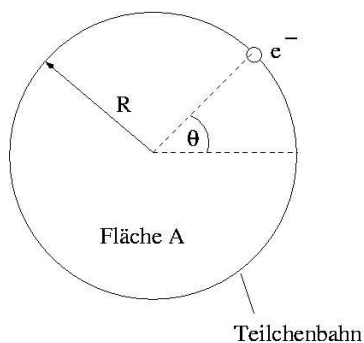


Abbildung 12: Idealisierte Bahn im Betatron

Die beschleunigende Kraft ist also

$$|\vec{F}| = |\dot{\vec{p}}| = \frac{eR}{2} \langle |\dot{\vec{B}}| \rangle . \quad (2.10)$$

Daraus folgt:

$$|\vec{p}(t)| = \int_0^t |\vec{F}| d\tau = \frac{eR}{2} \bar{B}(t) = eR |\vec{B}(t)| ,$$

wobei  $p(0) = 0$  angenommen wird. Es ergibt sich zunächst  $|\dot{\vec{B}}| = \langle |\dot{\vec{B}}| \rangle / 2$  und durch Integration die **Wiederöe'sche Betatronbedingung**

$$|\vec{B}(t)| = \frac{1}{2} \langle |\vec{B}(t)| \rangle + |\vec{B}_0| . \quad (2.11)$$

Unter dieser Bedingung sind Teilchenbahnen stabil, die Magnetpole müssen dementsprechend geformt werden (Abb. 11). Es sei noch erwähnt, dass die Teilchen Schwingungen um die Idealbahn ausführen, was später auch bei Synchrotrons von Interesse sein wird (siehe Kap. 5.3.2). Man bezeichnet diese als Betatronschwingungen. Der Begriff wird allerdings allgemein für transversale Schwingungen von Teilchen um die Sollbahn verwendet, auch in anderen Beschleunigern.

## Teil II

# Synchrotrons und Speicherringe

### 3 Übersicht, Einleitung

Die Beschleunigertypen, die bislang besprochen wurden, eignen sich nicht für sehr hohe Teilchenenergien, da man sehr schnell an technische Grenzen stößt. Es wird z.B. immer aufwendiger, die für eine elektrostatische Beschleunigung benötigte Hochspannung zu generieren. Ein Linac nimmt bei hohen Energien zu große Dimensionen an, ebenso der Magnet eines Zyklotrons, der das erforderliche starke Feld für ein großes Volumen bereitstellen muss.

Deshalb wurde das Konzept des Synchrotrons (Prinzip: 1945 von Veksler, McMillan und Wiederöe) entwickelt, mit dem sich sehr viel höhere Energien realisieren lassen. Das Synchrotron ist ein Kreisbeschleuniger, in dem sich die Teilchen auf einer durch die Anordnung der Ablenkmagnete vorgegebenen Bahn im Vakuum bewegen. Die Teilchen werden durch Hochfrequenz-Resonatoren hochbeschleunigt, mit Dipolmagneten auf der Bahn gehalten und mit Fokussiermagneten (Quadrupole, Sextupole) stabilisiert (siehe Abb. 13). Magnete, die Dipol- und Quadrupolfelder kombinieren, werden als *combined function* bezeichnet, während die Trennung beider, in unterschiedliche Bauelemente, als *separated function* bekannt ist. Da sich der Impuls  $p$  der Teilchen pro Umlauf ändert, muss man wegen

$$\frac{1}{\rho} = \frac{eB(t)}{p} ,$$

das ablenkende Magnetfeld  $B(t)$  erhöhen (synchron zu  $p \curvearrowright$  Synchrotron), um den Radius  $\rho$  konstant zu halten. Der Vorteil gegenüber dem Zyklotron ist das vergleichsweise kleine Feldvolumen um den Strahl herum. Die Teilchen werden vorbeschleunigt, bevor sie in den Beschleunigerring treten. Grund dafür ist einmal der zusätzliche Ablenkeffekt des Erdmagnetfelds, der durch höhere Teilchenenergien verringert wird, und weiterhin, dass es eine Methode ultrarelativistische Teilchen, bei konstanter Beschleunigungsfrequenz und relativ kleinen Magneten, optimal weiterzubeschleunigen gibt. Der Hauptgrund ist jedoch, dass jedes Synchrotron eine Grenze für das Verhältnis von Anfangs- und Endenergie hat, was an der meist schlechten Feldqualität am Anfang der Magnetisierungskurve liegt (Remanenz der Magnetpole).

Die Teilchen werden normalerweise bei Energien von  $10 \rightarrow 20\text{MeV}$  mit einem Linac oder einem Microtron in das Synchrotron eingeschossen.

Die größte Anlage dieser Art ist der *Large Hadron Collider* am CERN (siehe [1]) mit einem Radius  $R \simeq 4.3\text{km}$  und einem  $B_{max} \simeq 5.4\text{T}$  der Ablenkmagnete.

Einen Speicherring kann man als eingefrorenes Synchrotron (*Flat Top* (da Magnetisierungskurve am Ende flach verläuft) Zustand) verstehen, in ihm werden die Teilchen nicht mehr beschleunigt, sondern nur gespeichert, um z.B. Kollisionsexperimente durchzuführen.

### 4 Collider, Speicherringe

Ein elementarer Prozess zur Erzeugung neuer Teilchen ist die Kollision von Teilchenpaaren (z.B. Elektron-Positron). Dabei ist es energetisch am günstigsten (Kap. 4.1),



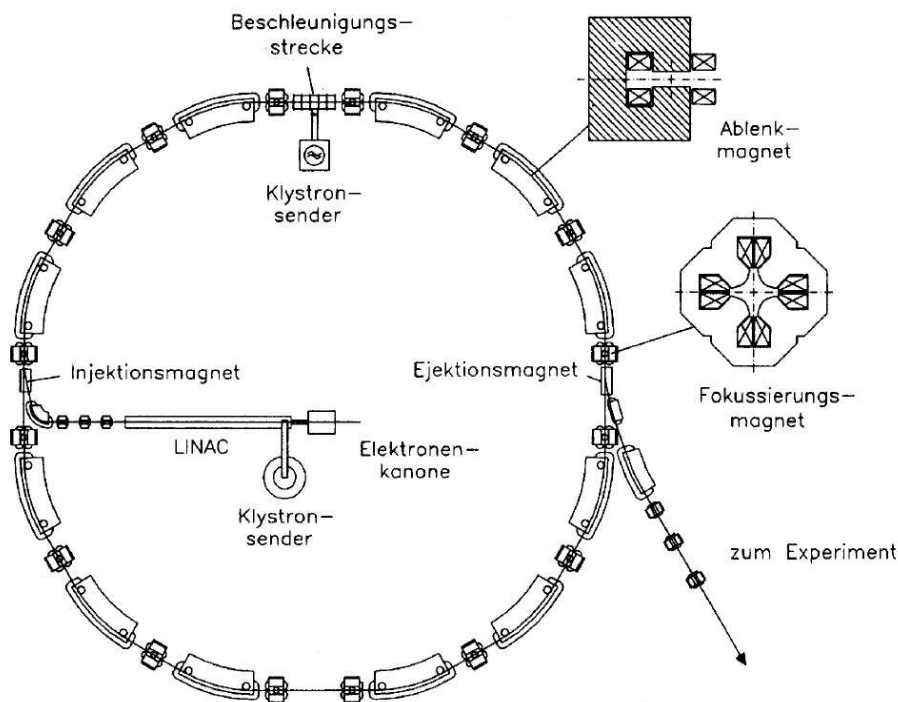


Abbildung 13: Prinzipieller Aufbau eines Synchrotrons

zwei Teilchenstrahlen gleicher Energie aufeinander prallen zu lassen. Da die hochbeschleunigten, gepulsten Strahlen eine sehr geringe Dichte haben, ist es in der Praxis nicht einfach, eine genügend hohe Ereignisrate von zentralen Stößen zu realisieren. Speicherringe (*storage rings*) haben sich dafür bis jetzt als erfolgreichstes Konzept erwiesen.

Ein Speicherring unterscheidet sich prinzipiell kaum von einem Synchrotron. Die Teilchen werden in ihm allerdings nicht mehr beschleunigt, sondern nur gespeichert. Der Ring wird von zwei Teilchenstrahlen mit entgegengesetztem Umlaufsinn durchlaufen, welche in den Interaktionszonen teilweise zur Kollision gebracht werden. Besonders einfach ist das mit Elektronen und Positronen (LEP [2], inzwischen abgebaut) oder Protonen und Antiprotonen (Tevatron [3]) zu realisieren, da sie sich nur durch das Vorzeichen der Ladung unterscheiden, und somit bei umgekehrten Umlauf die gleiche Kraft in den Magnetfeldern erfahren (Gl. 1.3).

Die Beschleunigungsstrecken im Speicherring sind zum Ausgleich der Energieverluste (z.B. durch Synchrotronstrahlung) vorhanden. Die Teilchen werden mit der gewünschten Energie von einem Vorbeschleuniger (Linac, Synchrotron) in den Ring eingekoppelt.

Neben Elektron-Positron und  $\bar{p}p$  Speicherringen gibt es auch einige, die Protonen mit Protonen, oder auch Protonen mit Elektronen zur Kollision bringen. Ein Beispiel für letzteres ist der Doppelring HERA am DESY ([8]) mit einem Umfang von 6.3km. Aufgrund der unterschiedlichen Massen, müssen die Teilchen in getrennten Ringen umlaufen, die bei HERA übereinander angeordnet sind. Sie werden nur in den Kollisionszonen zusammengeführt.

## 4.1 Physik der Teilchenkollision

Um Teilchen zu erzeugen, ist es energetisch sehr ungeschickt, einen Teilchenstrahl auf ein ruhendes *target* zu schießen. Der dabei auftretende Rückstoß verschlingt einen Großteil der Energie. Günstiger ist es, zwei Strahlen mit gleichem Impuls gegeneinander laufen zu lassen. Beide Ansätze sollen im folgenden quantitativ analysiert werden. Angenommen man schießt Teilchen der Sorte 1 (Masse  $m$ ) und der Geschwindigkeit  $u_c$  auf ruhende Teilchen der Sorte 2 (die sich von 1 nur durch ihre Ladung unterscheiden), dann gilt im Laborsystem  $\mathbf{K}$  vor dem Stoß:

$$\begin{aligned} \text{Geschwindigkeit} & : v_1 = u_c & v_2 & = 0 \\ \text{Impuls} & : p_1 = p_c & p_2 & = 0 \\ \text{Energie} & : E_1 = p_c c & E_2 & = 0 \\ & \gamma & = & \frac{E_1}{mc^2} \end{aligned}$$

Im Schwerpunktsystem ( $\sum p_i = 0$ )  $\mathbf{K}'$  gilt vor dem Stoß:

$$\begin{aligned} \text{Geschwindigkeit} & : v'_1 = \dot{u}_c & v'_2 & = -\dot{u}_c \\ \text{Impuls} & : p'_1 = p'_c & p'_2 & = -p'_c \\ \text{Energie} & : E_1 = p'_c c & E_2 & = p'_c c \\ & \gamma' & = & \frac{E_1}{mc^2} \end{aligned}$$

In  $\mathbf{K}'$  kommen die Teilchen nach einem total inelastischen Stoß zur Ruhe und die im Stoß umgesetzte Energie ist

$$E^* = E_1 + E_2 = 2p'_c c = 2\gamma' mc^2 \quad . \quad (4.1)$$

Diese Energie steht der Teilchenreaktion, etwa zur Anregung oder Teilchenerzeugung, maximal zur Verfügung. Verloren geht allerdings die Energie, die durch die Bewegung von  $\mathbf{K}'$  gegen  $\mathbf{K}$  entsteht.

Das Verhältnis von aufgebrachtener Energie  $E_1$  und nutzbarer Energie  $E^*$  ist

$$\eta = \frac{E^*}{E_1} = \frac{2\gamma' mc^2}{\gamma mc^2} = \frac{2\gamma'}{\gamma} \quad . \quad (4.2)$$

$\gamma'$  wird aus der Lorentz-Transformation des 4-er Impulses von  $\mathbf{K}'$  nach  $\mathbf{K}$  berechnet. Mit  $\beta = v/c$  folgt:

$$\begin{pmatrix} E_1/c \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma' & \beta'\gamma' \\ \beta'\gamma' & \gamma' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E'_1/c \\ p'_1 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt mit  $p'_1 = E'_1/c$

$$p_1 = \gamma'(\beta' + 1)p'_1 \quad .$$

Extrem relativistisch gilt  $\beta' \approx 1$  und damit

$$p_1 = 2\gamma' p'_1 = 2\gamma'(\gamma' mc) = 2\gamma'^2 mc \quad .$$

Da allgemein  $p_1 = \gamma mc$  gilt, folgt

$$\gamma' = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \quad (4.3)$$

und für den Wirkungsgrad

$$\eta = \sqrt{\frac{2}{\gamma}} . \quad (4.4)$$

Der Wirkungsgrad wird also immer kleiner, je relativistischer die Teilchen sind, was bedeutet, dass man exorbitant hohe Energien benötigt, um die zur Teilchenproduktion erforderlichen Energien als Stoßenergie zu erhalten.

Schießt man dagegen zwei Strahlen gleichen Impulses gegeneinander, so sind Labor- und Schwerpunktsystem das gleiche und die für den Teilchenprozess zur Verfügung stehende Energie ist

$$E^* = 2E_1 .$$

## 4.2 Ereignisraten

1. *Colliding Beams*: Lässt man zwei Teilchenstrahlen kollidieren, so ist die Anzahl der Stöße pro Zeit- und Flächeneinheit gegeben durch

$$\dot{N}_p = \sigma_p \mathcal{L} , \quad (4.5)$$

wobei  $\sigma$  der Wirkungsquerschnitt der Teilchenreaktion, und  $\mathcal{L}$  die *Luminosität* ist.

Luminosität  $\mathcal{L}$  = Maß für die Stoßwahrscheinlichkeit;

$\mathcal{L}$  ist eine charakteristische Größe für die Leistungsfähigkeit jeder Beschleunigeranlage und kann berechnet werden mit

$$\mathcal{L} \simeq \frac{1}{4\pi} \frac{f_u N_1 N_2}{\sigma_x \sigma_z} . \quad (4.6)$$

Die Luminosität steigt also mit der Teilchenzahl  $N_i$  des Einzelstrahls und der Frequenz  $f_u$  mit der die Strahlen aufeinandertreffen an. Den gleichen Effekt hat eine Verringerung der vertikalen und horizontalen Strahldimension in der Interaktionszone.

2. *Fixed Target*: Wird ein Teilchenstrahl auf ein ruhendes *target* (z.B. Gastarget) geschossen, so ist die Luminosität gegeben durch

$$\mathcal{L} = i \cdot n . \quad (4.7)$$

$i[T/s]$  ist der Teilchenstrom des Strahls und  $n[T/cm^2]$  die Flächendichte des *targets*.

Für das HERMES Experiment ([9]) mit einem polarisierten Gastarget ( $n = 10^{14}/cm^2$ ) und einem maximalen Elektronenstrom von  $I_e^{max} = 50mA \Rightarrow n = 3.1 \cdot 10^{17}/s$  ergibt sich eine Luminosität von

$$\mathcal{L}_{Hermes}^{pol.target} = 3 \cdot 10^{31} cm^{-2} s^{-1}$$

Von Interesse ist meistens auch die integrierte Luminosität,

$$\mathcal{I} = \int_{Mezeit} \mathcal{L} dt ,$$

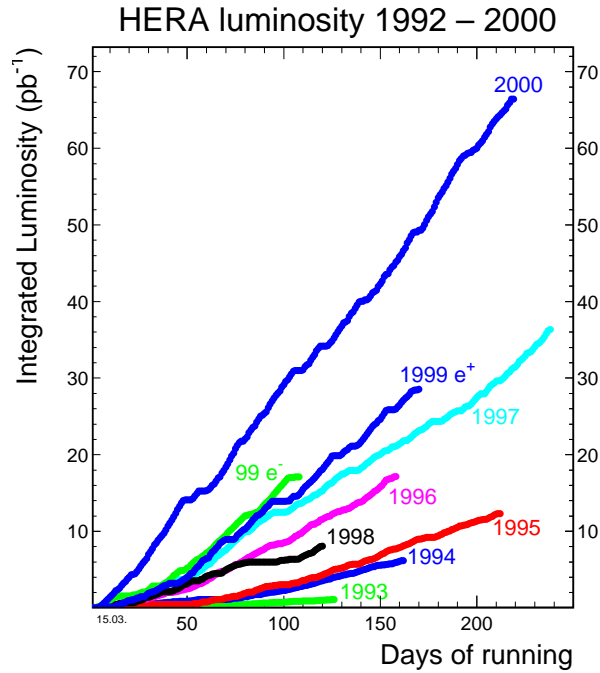


Abbildung 14: Integrierte Luminosität des ZEUS Experiments im HERA Speicherring

bei einem Experiment, das über eine gewisse Zeit läuft. Die in dieser Meßzeit auftretende Zahl von Ereignissen ist nämlich nach Gl. 4.5

$$N_p = \sigma_p \int_{\text{Messzeit}} \mathcal{L} dt = \sigma_p \mathcal{I} . \quad (4.8)$$

Als Beispiel ist eine integrierte HERA Luminosität in Abb. 14 gezeigt. Die Luminosität wird in  $(b \cdot s)^{-1}$  angegeben, wobei  $b = \text{barn} = 10^{-28} m^2$  ist. Sie liegt meist im  $pb$  = pikobarn Bereich, z.B.  $\mathcal{L}_{1\text{Jahr}}^{\text{Hermes}} \simeq 100 pb^{-1}$ . In diesem Beispiel würde eine bestimmte Reaktion  $X$  mit dem Wirkungsquerschnitt  $\sigma_X = 1 \mu b = 10^{-34} m^2$  mit einer Häufigkeit  $N_X = 10^6$  beobachtet werden.

## 5 Einführung Strahldynamik

### 5.1 Schwache Fokussierung (*weak focusing* WF)

Da die Teilchen sehr viele Umläufe in einem Synchrotron/Speicherring durchlaufen, ist die Stabilität des Strahls sehr wichtig. Damit Teilchen mit kleinen Abweichungen von der Sollbahn (*design orbit*) wieder auf jene zurückgeführt werden, muss das Magnetfeld in der nahen Umgebung der Sollbahn bestimmte Voraussetzungen erfüllen. Um das Prinzip der schwachen Fokussierung (schwach wegen der relativen Stärke der fokussierenden Kräfte) zu erklären, betrachtet man ein Führungsfeld  $B_z(r)$ , welches unabhängig vom Azimutwinkel  $\theta$  ist. Die Sollbahn ist also ein Kreis mit Radius

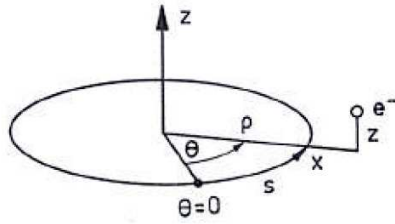


Abbildung 15: Koordinatensystem für die Bewegung eines Teilchens in einem Kreisbeschleuniger

$\rho = mv/eB$ , welcher in der  $z = 0$  Ebene liegen soll (Abb. 15).

Die Bewegung soll stabil sein, wenn kleine Abweichungen der Teilchen von dieser Bahn zu rücktreibenden Kräften führen, die sie um die Sollbahn oszillieren (Betatron-Oszillationen) lassen.

Für die Lorentz-Kraft muss gelten:

$$evB_z(r) \begin{cases} < \frac{mv^2}{r} & \text{für } r < \rho \\ > \frac{mv^2}{r} & \text{für } r > \rho \end{cases} \quad (5.1)$$

Für kleine Abweichungen gilt

$$r = \rho + x = \rho \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right) \quad (5.2)$$

$$\frac{mv^2}{r} \approx \frac{mv^2}{\rho} \left( 1 - \frac{x}{\rho} \right)$$

$$evB_z(r) \approx evB_0 \left( 1 - n \frac{x}{\rho} \right) \quad (5.3)$$

wobei  $B_0 = B_z(\rho)$  ist und  $n$  der *Feldindex*

$$n = -\frac{\rho}{B_0} \left( \frac{\partial B_z}{\partial r} \right)_{r=\rho} . \quad (5.4)$$

Setzt man Gl. 5.2 und Gl. 5.3 in Gl. 5.1 ein, ergibt sich die horizontale Stabilitätsbedingung  $n < 1$ . Gl. 5.1 ist auch für  $n = 0$  erfüllt, d.h. für ein homogenes Feld. Diesen Fall bezeichnet man als geometrische Fokussierung.

Damit die Bahn stabil ist, muss auch für vertikale Abweichungen eine rücktreibende Kraft das Teilchen in die Sollebene zurückziehen,

$$F_z = -C \cdot z \quad (C = \text{const.}) .$$

Das erfordert eine horizontale Feldkomponente

$$B_x = -\check{C} \cdot z .$$

Da im Vakuum  $\nabla \times \mathbf{B} = 0$  gilt, folgt:  $\partial B_x / \partial z = \partial B_z / \partial x = \partial B_z / \partial r$ .  $B_z$  muss also mit zunehmendem  $r$  abnehmen, was bedeutet, dass  $n > 0$  sein muss (Abb. 16). Horizontale und vertikale Stabilität wird also erreicht, wenn

$$0 < n < 1 \quad (5.5)$$

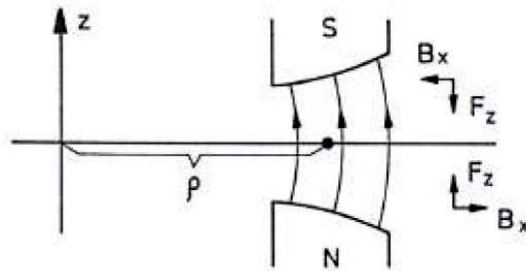


Abbildung 16: Magnetfeld in Nähe des *design orbits*, um vertikale Stabilität zu erreichen;

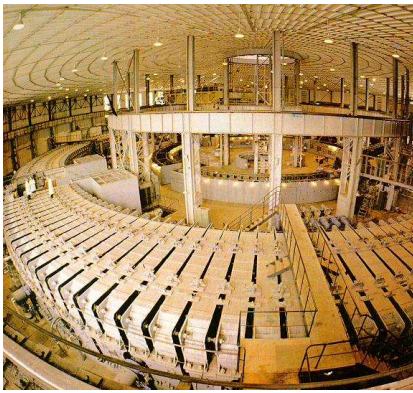


Abbildung 17: Synchrotron des *JINR* in Dubna

gilt. Sind die Auslenkungen bezüglich der Sollbahn genügend klein, so ergeben sich folgende entkoppelte Bewegungsgleichungen, die später hergeleitet werden:

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 - n)x = 0 \quad (5.6)$$

$$\ddot{z} + \omega_0^2 n \cdot z = 0 \quad , \quad (5.7)$$

wobei  $\omega_0 = eB_0/m$  und  $f_0 = \omega_0/2\pi$  die Umlauffrequenzen der Teilchen im Synchrotron sind. Aus Gl. 5.5 folgt, dass für die Betatronfrequenzen gilt:  $f_{x,y} < f_0$ . Es finden also weniger als eine Oszillation pro Umlauf statt.

Das Problem ist dann, dass, bei sehr großen Bahnumfängen, die Abweichungen auch sehr groß werden, weshalb wiederum die Magnete sehr groß dimensioniert werden müssten. Ein Beispiel für ein solches, nicht stark-fokussierendes Synchrotron, ist das Synchrotron (Abb. 17) am *Joint Institute for Nuclear Research* ([14]) in Dubna.

Um die Apparaturen klein zu halten, verwendet man die starke Fokussierung  $|n| \gg 1$  (entdeckt 1950 von Nicholas Christofilos, auch *alternating-gradient* (AG) Fokussierung, 1952 von Courant, Livingston, Snyder erstmals veröffentlicht). Erste Beschleuniger mit starker Fokussierung waren das CERN-PS [4], das Brookhaven AGS [5] und das 2.5 GeV Synchrotron in Bonn [15] Abb. 18. Die Forderung  $|n| \gg 1$  ist bei azimuthal konstanten Feldern wegen Gl. 5.5 nicht möglich. Teilt man den Orbit dagegen in einzelne Sektoren auf, in denen sich Felder mit  $n \gg +1$  und  $n \ll -1$  abwechseln, so ergibt sich insgesamt eine Fokussierende Struktur, was weiter unten behandelt wird.

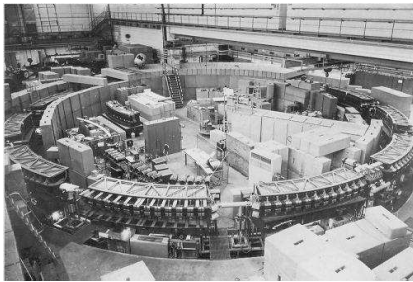


Abbildung 18: Synchrotron der Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

## 5.2 Synchrotron Magnete

### 5.2.1 Allgemeines

In modernen Synchrotrons werden *separated function* Magnete verwendet, da man mit ihnen höhere Feldstärken erreichen kann und gleichzeitig sehr flexibel ist, im Gegensatz zu *combined function* Elementen. In älteren Beschleunigern (z.B. dem CERN Proton Synchrotron [4]) wurden dagegen zunächst nur *combined function* Magnete verwendet.

Da die folgenden Berechnungen nur für den linearen Teil der Magnetisierungskurve



Abbildung 19: *combined function* Magnet des CERN PS

( $\mu = \text{const.}$ ) des Kernmaterials gilt, und weiterhin von einer sehr hohen relativen Permeabilität ( $\mu_r$ ) ausgegangen wird, eignet sich gutes Weicheisen besonders zum Bau solcher Magnete. Zur Vermeidung von Feldverzerrungen durch Wirbelströme bei Feldänderungen, wie dem *ramping*, werden die Magnete, ähnlich wie Trafokerne, aus Blechen zusammengesetzt (*laminierte Magnete*).

### 5.2.2 Berechnung statischer Magnetfelder bei Eisenpolen

Der Strahl verläuft immer in einem Vakuumrohr, weshalb auch nur der Feldverlauf in diesem Bereich von Interesse ist. Die Vorgehensweise im folgenden soll sein: man gibt

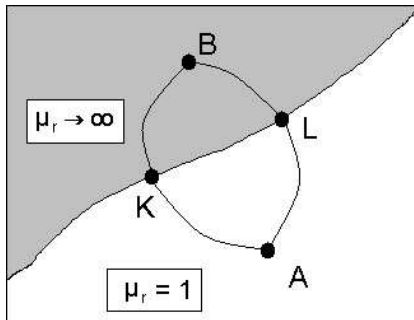


Abbildung 20: Allgemeiner Integrationsweg

sich den gewünschten Feldverlauf im Vakuum vor und formt die Magnetpole entsprechend.

Allgemein gilt für statische Felder:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} .$$

Für den Bereich des Strahlrohrs ( $\mu_r = 1, j = 0$ )

$$\nabla \times \vec{H} = 0 ; \quad (5.8)$$

Da  $\nabla \times \nabla \varphi = 0$  für jedes skalare Potential erfüllt ist, existiert ein  $\varphi$  mit

$$\vec{H} = \nabla \varphi . \quad (5.9)$$

Es werden nur transversale Feldänderungen betrachtet, d.h. das Feld ist nur von  $x, z$  abhängig, aber nicht von  $s$ .

Wegen Gl. 5.8 gilt  $\oint \vec{H} d\vec{l} = 0$ , was angewandt auf  $A \rightarrow K \rightarrow B \rightarrow L \rightarrow A$  ergibt:

$$\int_A^K \vec{H}_0 d\vec{l} + \int_K^B \vec{H}_e d\vec{l} + \int_B^L \vec{H}_e d\vec{l} + \int_L^A \vec{H}_0 d\vec{l} = 0 , \quad (5.10)$$

wobei  $\vec{H}_0$  das Feld im Spalt und  $\vec{H}_e$  das Feld im Eisen sein soll. An der Grenzfläche Eisen-Spalt gilt,  $|\vec{H}_e| = 1/\mu_r |\vec{H}_0|$ , weshalb man bei  $\mu_r \gg 1$  den Beitrag des Weges durch das Eisen vernachlässigen kann,

$$\approx \int_A^K \vec{H}_0 d\vec{l} = \int_A^L \vec{H}_0 d\vec{l} . \quad (5.11)$$

Das bedeutet, dass die Grenzflächen des hochpermeablen Materials Äquipotentialflächen sind.

Für die Flussdichte  $\vec{B}(x, z)$  gilt im Spalt  $\vec{B}(x, z) = \mu_0 \vec{H}(x, z)$ , was wiederum zu

$$\vec{B} = \nabla \phi \quad (5.12)$$

mit  $\phi(x, z) = \mu_r \mu_0 \varphi(x, z)$  führt. Aus  $\nabla \times \nabla \phi = 0$  folgt die Laplace-Gleichung

$$\nabla^2 \phi \stackrel{\text{transvers.}}{=} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 . \quad (5.13)$$

Nun kann man ausgehend vom gewünschten Feldverlauf die Form der Magnetpole berechnen.



Beh.: Angenommen, es sei  $B_z(x, z) = R_{z=const.}(x) + f(z)$  vorgegeben, weiterhin sei  $B_x(x=0) = 0$  und  $f(0) = 0$ , dann ist der Feldverlauf  $\vec{B}(x, z)$  festgelegt.

Bew.:

$$B_z = \frac{\partial}{\partial z} \phi \Rightarrow \phi(x, z) = \int_0^z B_z dz = R_z(x) \cdot z + \int_0^z f(z) dz$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = z \cdot \frac{\partial^2 R_z(x)}{\partial x^2} + \frac{df(z)}{dz}$$

$$\Rightarrow f(z) = - \int_0^z \frac{d^2 R_z(x)}{dx^2} \cdot z dz = - \frac{1}{2} \frac{d^2 R_z(x)}{dx^2} z^2$$

Das Potential ergibt sich also zu:

$$\phi(x, z) = R_z(x) \cdot z - \frac{1}{6} \frac{d^2 R_z(x)}{dx^2} z^3 . \quad (5.14)$$

Die Feldverteilung ist damit

$$\vec{B}(x, z) = \left( \frac{\partial \phi(x, z)}{\partial x}, \frac{\partial \phi(x, z)}{\partial z} \right) . \quad (5.15)$$

Der Feldverlauf ist also mit der Vorgabe von  $R_z(x)$  festgelegt und man kann damit nun die Geometrie der Magnetpole berechnen.

### 5.2.3 Dipolmagnet

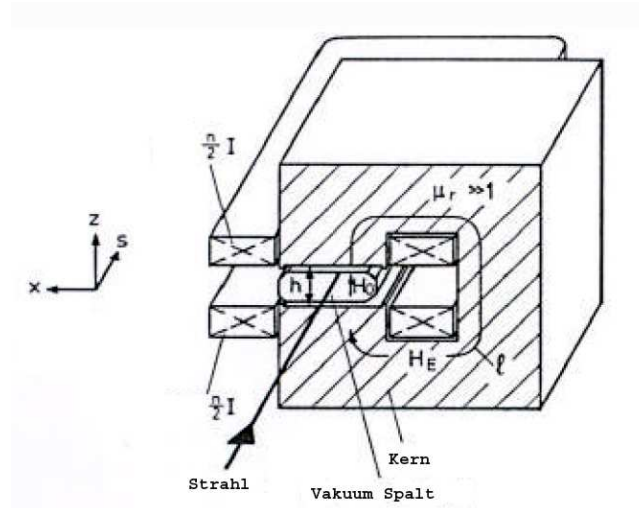


Abbildung 21: Aufbau eines Dipolmagneten mit Integrationsweg zur Berechnung des Feldes im Schlitz

Erstes Beispiel ist der Dipolmagnet, bei ihm gilt:

$$R_z(x) = B_0 = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 R_z(x)}{dx^2} = 0 .$$

Daraus folgt für das Potential mit Gl. 5.14:

$$\phi_{Dipol}(x, z) = B_0 \cdot z \quad , \quad (5.16)$$

und für die Feldverteilung mit Gl. 5.15

$$\vec{B}_{dipol} = ( 0 , B_0 ) \quad . \quad (5.17)$$

Die Äquipotentialflächen sind also Flächen, die durch  $z = \text{const.}$  definiert sind, welche damit die Polgrenzen festlegen.

Wählt man einen Integrationsweg um die Spulen herum (Abb. 21) und wendet das Ampère'sche Gesetz

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = nI \quad , \quad (5.18)$$

an:  $hH_0 + hH_e = nI$  , mit  $H_e = \frac{1}{\mu_r} H_0$ . Da  $\mu_r \gg 1$  folgt:

$$B_0 \cong \frac{\mu_0 nI}{h} \quad , \quad (5.19)$$

mit Spalthöhe  $h$ . Die Krümmung  $1/\rho$  eines Teilchens mit Impuls  $p$ , und damit eine Größe, die die relative Stärke des Dipols angibt, ist also

$$\frac{1}{\rho} = \frac{eB_0}{p} \quad . \quad (5.20)$$

## 5.2.4 Quadrupolmagnet

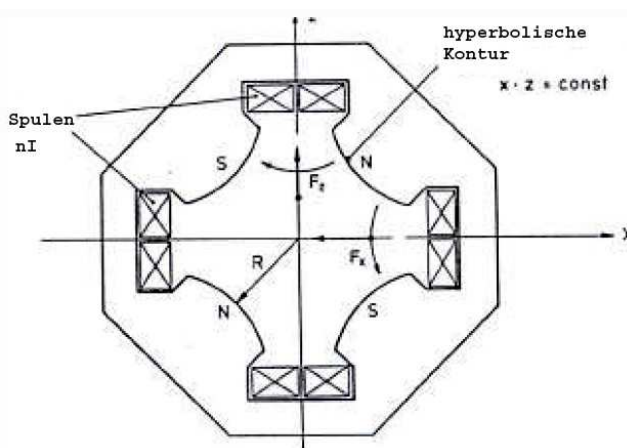


Abbildung 22: Querschnitt durch einen Quadrupolmagnet; für ein negativ geladenes Teilchen, das sich in die Zeichenebene hineinbewegt, ist die gezeigte Polarität vertikal fokussierend und horizontal defokussierend;  $g < 0$  in diesem Fall;

Für einen horizontal fokussierenden Magnet ist ein Magnetfeld erwünscht, welches linear mit der horizontalen Auslenkung ansteigt,

$$R_z(x) = g \cdot x \quad (g = \text{konstanter Gradient}) \quad .$$

Auch hier gilt also:

$$\frac{d^2 R_z(x)}{dx^2} = 0 ,$$

und damit das Potential und das Feld:

$$\phi_{\text{Quadrupol}} = gxz \quad (5.21)$$

$$\vec{B}_{\text{quad}} = (gz, gx) . \quad (5.22)$$

Äquipotentiallinien:  $\phi = gxz = \text{const.} = \phi_0$

$$\curvearrowright z = \frac{\phi_0}{gx}$$

Quadrupolfelder werden also durch Pole mit hyperbolischer Kontur erzeugt (Abb. 22). Eine Beziehung zwischen dem Gradienten  $g$  und dem Strom  $I$ , der durch die Spulen fließt, erhält man wieder aus dem Integraltheorem  $\oint \vec{H} d\vec{l}$ . Es ergibt sich (Abb. 23):

$$nI = \int_0^R H(r) dr + \int_1^2 H_e dl + \int_2^0 H dl ,$$

wobei von 0 nach  $R$  gilt,  $H(r) = gr/\mu_0$  mit  $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ . Den Beitrag von 1 nach 2

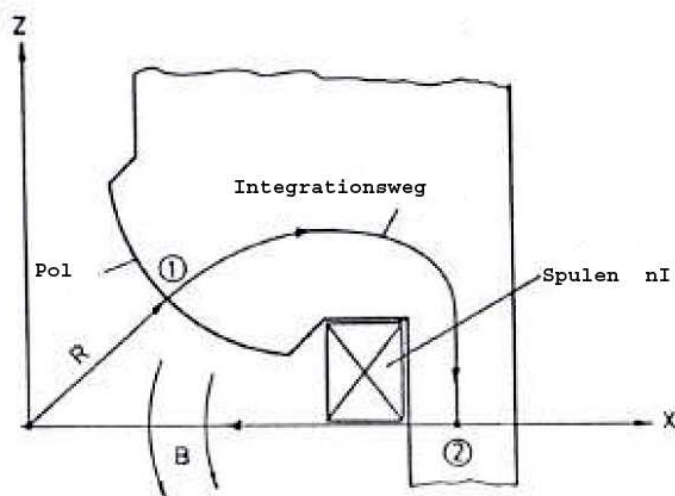


Abbildung 23: Integrationsweg zur Berechnung des Quadrupolgradienten in Abhängigkeit des Spulenstroms

kann man wegen  $\mu_r \gg 1$  wieder vernachlässigen, und das dritte Integral verschwindet ganz, wegen  $\vec{H} \perp d\vec{l}$ . Es bleibt übrig:

$$nI = \frac{1}{\mu_0} \int_0^R gr dr \implies g = \frac{2\mu_0 nI}{R^2} ; \quad (5.23)$$

Analog zur Ablenkstärke  $1/\rho$  eines Dipols definiert man eine Fokussierungsstärke des Quadrupols (normalisiert bezüglich des Teilchenimpulses) oder auch Quadrupolstärke,

$$k = \frac{eg}{p} \quad (5.24)$$

Versteht man den Magnet als Linse, so ist seine Brennweite  $f$  gegeben durch

$$\frac{1}{f} = k \cdot l \quad , \quad (5.25)$$

wobei  $l$  die Länge des Magneten ist.

Ein wichtiger Aspekt eines Quadrupols ist, dass er nur in einer Ebene fokussierend wirkt, in der dazu senkrechten sogar defokussierend, was man sich leicht am Feldverlauf in Abb. 22 klar machen kann. Man kombiniert deshalb horizontal (QF) und vertikal (QD) fokussierende Magnete zu Dubletts, und erreicht so eine Fokussierung in beiden Ebenen.

### 5.2.5 Combined Function Magnete

Ein sog. *combined function* Magnet (auch Synchrotronmagnet) kombiniert einen Dipol mit einem Quadrupol. Sowohl Potential als auch Feld ist also eine Kombination dieser beiden:

$$V(x, y) = -B_0 z + g x z \quad , \quad (5.26)$$

$$\vec{B}_{\text{comb}} = \begin{pmatrix} g z \\ -B_0 + g x \end{pmatrix} \quad . \quad (5.27)$$

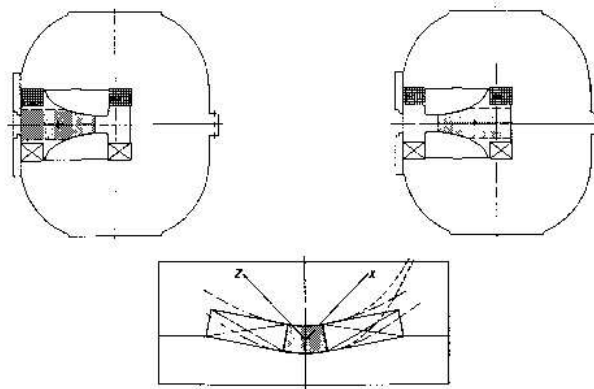


Abbildung 24: Querschnitt eines *combined function* Magneten, im Gegensatz zu einem Dipol, sind die Pole hyperbolisch geformt;

### 5.2.6 Sextupolmagnet

Da die Brennweite eines Quadrupols vom Impuls des Teilchens abhängt, entstehen chromatische Abbildungsfehler wie in der Optik. Um diese Fehler zu korrigieren ver-

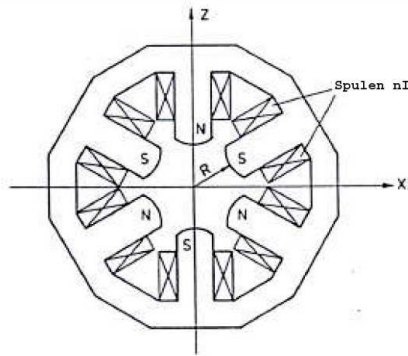


Abbildung 25: Querschnitt durch einen Sextupolmagnet; die Form der Pole errechnet sich aus dem Potential zu  $3x^2z - z^3 = \text{const.}$

wendet man Sextupolmagnete (siehe auch Kap. 5.3.5). Wieder wird

$$R_z(x) = \frac{1}{2}\check{g}x^2 \quad (5.28)$$

vorgegeben.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} R_z(x) &= \check{g} \\ \Rightarrow \phi(x, z) &= \frac{1}{2}\check{g}x^2z - \frac{1}{6}\check{g}z^3 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$B_z(x, z) = \frac{1}{2}\check{g}(x^2 - z^2) \quad (5.29)$$

$$B_x(x, z) = \check{g}xz \quad (5.30)$$

### 5.2.7 Allgemeine Multipol Entwicklung

Nimmt man wie bisher nur transversale Magnetfeldkomponenten und eine dazu senkrechte Teilchenbewegung an, so gilt

$$\frac{1}{R(x, z, s)} = \frac{e}{p} B_z(x, z, s)$$

mit dem lokalen Bahnbiegeradius  $R$  und dem Teilchenimpuls  $p$ . Da  $R$  sehr gross, verglichen mit den Strahldimensionen, ist, macht eine Entwicklung um die Idealbahn Sinn

$$\begin{aligned} \frac{e}{p} B_z(x) &= \frac{e}{p} B_{z0} + \frac{e}{p} \frac{dB_z}{dx} x + \frac{e}{2p} \frac{d^2 B_z}{dx^2} x^2 + \frac{e}{6p} \frac{d^3 B_z}{dx^3} x^3 + \dots \\ &= \frac{1}{R} + kx + \frac{1}{2}mx^2 + \frac{1}{6}ox^3 + \dots \\ &\quad \text{Dipol} \quad \text{Quadrupol} \quad \text{Sextupol} \quad \text{Oktupol} \end{aligned} \quad (5.31)$$

Das Führungsfeld wird also aus einer Reihe von Multipolen gebildet (Tab. 1).

Multipol	Definition	Wirkung
Dipol	$\frac{1}{R} = \frac{e}{p} B_{z0}$	Strahlableitung
Quadrupol	$k = \frac{e}{p} \frac{dB_z}{dx}$	Strahlfokussierung
Sextupol	$m = \frac{e}{p} \frac{d^2 B_z}{dx^2}$	Kompensation der Chromatizität
Oktupol	$o = \frac{e}{p} \frac{d^3 B_z}{dx^3}$	Feldfehler oder Feldkompensation

Tabelle 1: Wichtigste Multipole für die Strahlführung

## 5.3 Teilchenbewegung in einem Kreisbeschleuniger

### 5.3.1 Bewegungsgleichungen

Als *design orbit* wird im folgenden ein Kreis angenommen, der in der horizontalen Ebene liegt, d.h. der Beschleuniger ist aus *combined function* Magneten aufgebaut. Verwendet werden Zylinderkoordinaten  $(r, \theta, z)$  und das Dipolfeld soll in positive z-Richtung orientiert sein (Abb. 15).

Der Ortsvektor des Teilchens ist dann

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + r\vec{u}_r + z\vec{u}_z \quad |\vec{R}_0| = \text{const.} ,$$

und für kleine  $d\theta$  gilt:

$$d\vec{u}_r = d\theta\vec{u}_\theta , \quad d\vec{u}_\theta = -d\theta\vec{u}_r , \quad d\vec{u}_z = 0 ;$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \dot{\vec{R}} &= \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\vec{u}}_r + \dot{z}\vec{u}_z \\ &= \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z \end{aligned}$$

Die Beschleunigung ist dann

$$\ddot{\vec{R}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z$$

und es folgt

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{R}} &= -e\vec{v} \times \vec{B} \\ &= -e \left[ (r\dot{\theta}B_z - \dot{z}B_\theta) \vec{u}_r + (\dot{z}B_r - \dot{r}B_z) \vec{u}_\theta + (\dot{r}B_\theta - r\dot{\theta}B_r) \vec{u}_z \right] \end{aligned} \quad (5.32)$$

Wird  $B_\theta = 0$  angenommen, so erhält man

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= -er\dot{\theta}B_z(r, z, \theta) \\ m\ddot{z} &= er\dot{\theta}B_r(r, z, \theta) \end{aligned} \quad (5.33)$$

Für *combined function* Magnete (Gl. 5.26, 5.27) gilt

$$B_z = B_0 - gz , \quad B_r = B_x = -gz \quad (5.34)$$

Setzt man nun Gl. 5.34 in Gl. 5.33 ein und ersetzt  $r = \rho + x$  wobei  $\rho = \text{const.}$ , erhält man

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= -er\dot{\theta}(B_0 - gx) \\ m\ddot{z} &= -er\dot{\theta}gz \end{aligned} \quad (5.35)$$

Die azimutale Komponente  $v_\theta = r\dot{\theta}$  der Geschwindigkeit ist dabei viel größer als die transversalen  $\vec{v}_z$  und  $v_r$ , sodass man die Näherung  $v_\theta \approx |v|$  machen kann. Weiterhin ist es sinnvoll die Zeitvariable durch die Bogenlänge  $s$  entlang der Sollbahn zu ersetzen:

$$s = vt$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial t}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{1}{v} \dot{x} &\Rightarrow x'' = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} x = \frac{1}{v^2} \ddot{x} \\ &\Rightarrow \ddot{x} = v^2 x'' \quad , \end{aligned}$$

wobei  $x'' = d^2x/ds^2$ . In dieser Schreibweise werden die Gl. 5.35 zu

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{1}{r} - \frac{eB_0}{mv} + \frac{eg}{mv}x \\ z'' &= -\frac{eg}{mv}z \end{aligned}$$

mit  $mv = p = p_0 \left(1 + \frac{\Delta p}{p_0}\right)$ , wobei  $p_0 = \rho e B_0$  der Idealimpuls ist,  $\frac{1}{r} \approx \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{x}{\rho}\right)$ , der Annahme kleiner  $x$ ,  $\frac{\Delta p}{p_0} \ll 1$  und  $k = \frac{eg}{p_0}$  erhält man:

$$\begin{aligned} x'' - \left(k - \frac{1}{\rho^2}\right)x &= \frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{p_0} \\ z'' + kz &= 0 \end{aligned} \quad (5.36)$$

also die grundlegenden Bewegungsgleichungen  $x(s)$ ,  $z(s)$  der Teilchen in linearer Näherung. Gl. 5.36 gilt auch für getrennte Dipol- und Quadrupolmagnete. In Bereichen mit einem Dipolfeld ist  $k = 0$  und  $\rho$  der lokale Krümmungsradius. Im Quadrupolfeld ist  $\frac{1}{\rho} = 0$ .

Der Term  $\frac{1}{\rho^2}x$  beschreibt die schwache Fokussierung eines Ablenkmagneten, während  $k$  die starke repräsentiert. Ist  $\rho$  sehr gross, kann man die schwache Fokussierung vernachlässigen (vgl. HERA Protonen Beschleunigerring:  $k = 0.033m^{-2}$ ,  $\frac{1}{\rho^2} = 2.9 \cdot 10^{-6}m^{-2}$ ).

### 5.3.2 Fokussierungs, Betatronsoschwingungen

Im folgenden wird eine beliebige geschlossene Kurve in der horizontalen Ebene als Gleichgewichtsort angenommen, auf dem sich nur Teilchen mit Impuls  $p_0$  bewegen ( $\Delta p = 0$ ). Die transversale Bewegung (Gl. 5.36) wird dann durch

$$\begin{aligned} y'' + K(s)y &= 0 \\ K(s+L) &= K(s) \end{aligned} \quad (5.37)$$

beschrieben ( $y = x, z$ ), wobei die periodischen Funktionen  $k(s)$  und  $\rho(s)$  zu  $K(s)$ , dem periodischen Koeffizienten, zusammengefasst wurden. Für den Umfang des Orbits  $C$  gilt  $C = N \cdot L$ , wenn der Beschleuniger aus  $N$  identischen Zellen aufgebaut ist.

Gl. 5.37 wird auch *Hill'sche Differentialgleichung* genannt, mit den sinus- und kosinusartigen Lösungen

$$\cos\left(\sqrt{K(s)}s\right), \quad \sin\left(\sqrt{K(s)}s\right) .$$

Analog zu optischen Linsensystemen lässt sich eine Transfermatrix  $\mathcal{M}(s_2|s_1)$  für  $y = x, z$  finden, die die Bewegung von einem Punkt  $s_1$  nach  $s_2$  beschreibt,

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_{s_2} = \mathcal{M}(s_2|s_1) \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_{s_1}$$

mit  $\det \mathcal{M} = 1$  und für einen vollen Umlauf

$$\mathcal{M}(s + NL|s) = [\mathcal{M}(s + L|s)]^N .$$

Für  $n$  Umläufe

$$(\mathcal{M}(s))^{nN}$$

Die zugrundeliegende Matrix  $\mathcal{M}(s_i + L|s_i)$  für eine Periode hängt dabei auch vom gewählten Startpunkt  $s_i$  ab.

Die Matrix für zwei aufeinanderfolgende Sektoren wird durch eine Matrixmultiplikation berechnet

$$\mathcal{M}(s_3|s_1) = \mathcal{M}(s_3|s_2)\mathcal{M}(s_2|s_1) . \quad (5.38)$$

Die Bahn eines Teilchens bei  $n$  Umläufen ist genau dann stabil, wenn die Elemente der Matrix  $\mathcal{M}^{nN}$  beschränkt sind für  $n \rightarrow \infty$ .

Um eine Bedingung dafür zu finden, betrachtet man zunächst die Eigenwerte einer solchen Matrix

$$\mathcal{M}Y = \lambda Y \text{ mit } Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte sind dann

$$\det(\mathcal{M} - \lambda \mathbf{1}) = 0 \quad (5.39)$$

Sei  $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , dann gilt

$$\lambda^2 - \lambda(a + d) + (ad - bc) = 0 \quad (5.40)$$

$$\xrightarrow{\det \mathcal{M} = 1} \frac{1}{2} \text{tr} \mathcal{M} = \underbrace{\frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda}}_{=: \cos \mu} \quad (5.41)$$

Die neue Variable  $\mu$  ist reell, falls  $\frac{1}{2}|a + d| < 1$  und complex, wenn  $\frac{1}{2}|a + d| > 1$ , und die Lösungen von Gl. 5.40 sind

$$\lambda_1 = \cos \mu + i \sin \mu = e^{i\mu}, \quad \lambda_2 = \cos \mu - i \sin \mu = e^{-i\mu} \quad (5.42)$$

Nimmt man nun an, dass  $|a + d| \neq 2$ , damit  $\cos \mu \neq 1$  und  $\sin \mu \neq 0$ , kann man  $\mathcal{M}$  in der sog. Twiss-Form schreiben,

$$\mathcal{M} = \mathbf{1} \cos \mu + J \sin \mu , \quad (5.43)$$



wobei  $\mathbf{1}$  die Einheitsmatrix und  $J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\gamma & -\alpha \end{pmatrix}$  ist, mit

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{a-d}{2 \sin \mu} \\ \beta &= \frac{b}{\sin \mu} \\ \gamma &= -\frac{c}{\sin \mu}\end{aligned}\tag{5.44}$$

Aus  $\det \mathcal{M} = 1$  folgt die Beziehung zwischen den neuen Parametern

$$\beta\gamma - \alpha^2 = 1\tag{5.45}$$

Man kann nun zeigen, dass für die  $n$ -te Potenz von  $\mathcal{M}$  gilt

$$\mathcal{M}^n = \mathbf{1} \cos(n\mu) + J \sin(n\mu)\tag{5.46}$$

Hieraus sieht man, dass  $\mathcal{M}^n < \infty$  für  $n \rightarrow \infty$  nur dann gilt, wenn  $\mu$  reell ist. Als Stabilitätskriterium folgt

$$\text{Bahn stabil} \iff |\text{tr} \mathcal{M}| < 2 \iff \mu \text{ reell}\tag{5.47}$$

Es lässt sich auch zeigen, dass  $\mu$  unabhängig von  $s$  ist, während die Transfermatrix sehr wohl vom Referenzpunkt  $s$  abhängt.

Zusammenfassung:

$$\mathcal{M}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos \mu + \begin{pmatrix} \alpha(s) & \beta(s) \\ -\gamma(s) & -\alpha(s) \end{pmatrix} \sin \mu = \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\gamma \sin \mu & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{pmatrix}$$

$\alpha, \beta, \gamma$  sind  $L$ -periodische Funktionen von  $s$

$\mu \neq \mu(s)$

Der Grund für den Übergang zu den neuen Parametern  $\alpha, \beta, \gamma, \mu$  ist die Möglichkeit, mit ihnen die Bewegung als die eines Harmonischen Oszillators zu diskutieren.

### 5.3.3 Betafunktion $\beta(s)$

Die Betafunktion ist der wichtigste Twissparameter, da man  $\alpha$  und  $\gamma$  aus ihr berechnen kann. Um das zu zeigen, benötigt man das *Floquet'sche Theorem*:

Die Gleichung (siehe Gl. 5.37)

$$y'' + K(s)y = 0 \text{ mit } K(s+L) = K(s)$$

hat zwei unabhängige Lösungen

$$y_1(s) = e^{i\mu s/L} p_1(s), \quad y_2(s) = e^{i\mu s/L} p_2(s),\tag{5.48}$$

wobei  $\mu$  der charakteristische Koeffizient der DGL genannt wird und durch Gl. 5.41 definiert ist.  $p_1(s)$  und  $p_2(s)$  sind periodische Funktionen von  $s$

$$p_i(s+L) = p_i(s), \quad i = 1, 2.$$

Die Lösungen sind beschränkt, wenn  $\mu$  reell ist, also  $\iff$  die Spur der Transfermatrix über eine volle Periode  $L$  kleiner als 2 ist.

Um die  $\beta$ -Abhängigkeit von  $\alpha$  und  $\gamma$  zu zeigen, schreibt man die Transfermatrix in Twiss-Form:

$$\mathcal{M}(s) = \mathbf{1} \cos \mu + \begin{pmatrix} \alpha(s) & \beta(s) \\ -\gamma(s) & -\alpha(s) \end{pmatrix} \sin \mu$$

Da  $\mathcal{M}$  periodisch sein soll,  $\mu$  aber unabhängig von  $s$  ist, folgt, dass auch  $\beta(s)$  periodisch sein muss

$$\beta(s+L) = \beta(s) \quad (5.49)$$

Aus  $\det \mathcal{M} = 1$  folgt

$$\gamma(s) = \frac{1 + \alpha^2(s)}{\beta(s)} \quad (5.50)$$

Um  $\alpha$  durch  $\beta$  auszudrücken, geht man folgendermaßen vor

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_{s+L} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_s \stackrel{\text{Gl. 5.48}}{=} e^{\pm i\mu} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_s$$

woraus folgt

$$y(s) \cos \mu + (y(s)\alpha + y'(s)\beta) \sin \mu = y(s)(\cos \mu \pm i \sin \mu)$$

$$y\alpha + y'\beta = \pm iy$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\pm i - \alpha}{\beta} \quad (5.51)$$

Nimmt man die Gleichung für  $y_1(s)$ , also (+), und differenziert,

$$\frac{y''}{y'} - \frac{y'}{y} = \frac{-\alpha'}{i - \alpha} - \frac{\beta'}{\beta}$$

mit der Hill'schen DGL  $y'' = -Ky$  und Gl. 5.51 folgt

$$\frac{y''}{y'} = -K \frac{y}{y'} = -\frac{K\beta}{i - \alpha}$$

$$\frac{y''}{y'} - \frac{y'}{y} = -\frac{K\beta}{i - \alpha} - \frac{i - \alpha}{\beta} = \frac{-\alpha'}{i - \alpha} - \frac{\beta'}{\beta}$$

$$-K\beta^2 - (i - \alpha)^2 = -\alpha'\beta - \beta'(i - \alpha)$$

$$(\alpha^2 + K\beta^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - 1) - i(2\alpha + \beta') = 0$$

Da alle Elemente der Transfermatrix reell sind muss gelten:

$$\alpha(s) = -\frac{1}{2}\beta'(s) \quad (5.52)$$

Weiterhin

$$\alpha^2 + K\beta^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - 1 = 0$$

, setzt man hier Gl. 5.52 ein erhält man eine DGL für die Betafunktion

$$\frac{1}{2}\beta\beta'' - \frac{1}{4}\beta'^2 + K\beta^2 = 1 \quad (5.53)$$

Die Transfermatrix wurde nun durch eine einzige Funktion  $\beta(s)$  und einen Phasenparameter  $\mu$  ausgedrückt.

Man kann auch die unabhängigen Lösungen (Gl. 5.48)  $y_1(s)$  und  $y_2(s)$  durch diese beiden Größen ausdrücken. Integriert man Gl. 5.51

$$\frac{y'}{y} = \frac{\pm i + \frac{1}{2}\beta'}{\beta}$$

erhält man

$$\begin{aligned} y_{1,2}(s) &= a\sqrt{\beta(s)}e^{\pm i\Phi(s)} \\ \text{mit } \Phi'(s) &= \frac{1}{\beta(s)}, \quad a = \text{const.} \end{aligned} \quad (5.54)$$

Für Amplitude und lokale Wellenlänge gilt also

$$\text{Amplitude} \propto \sqrt{\beta(s)}, \quad \lambda(s) = 2\pi\beta(s) \quad (5.55)$$

Für den Phasenverschub  $\Phi(s)$  folgt

$$\Phi(s) = \int_{s_0}^s \frac{d\dot{s}}{\beta(\dot{s})} \quad (5.56)$$

Für den charakteristischen Koeffizienten der Hill DGL ergibt sich nach kurzer Rechnung

$$\mu = \int_s^{s+L} \frac{d\dot{s}}{\beta(\dot{s})} \quad (5.57)$$

Der sog. *Betatron-Tune*  $Q$  oder  $\nu$  gibt die Anzahl der Betatronschwingungen pro Umlauf an. Aus Gl. 5.48 und Gl. 5.57 folgt

$$Q = \frac{N\mu}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{ds}{\beta(s)} \quad (5.58)$$

$\oint$  steht hier für das Integral entlang des gesamten Umfangs des Beschleunigers, und nicht für ein beliebiges Wegintegral. Allgemein ist  $Q$  verschieden für  $x(s)$  und  $y(s)$ . Auch muss  $Q$  keine ganze Zahl sein. Ein ganzzahliges  $Q$  würde bedeuten, dass ein Teilchen eine Störung an einem bestimmten Punkt  $s_1$  immer mit der gleichen Phase erfährt. Das würde zu einer Vergrößerung der Betatronamplitude führen und somit irgendwann zum Verlust des Teilchens. Man versucht also ganzzahlige  $Q$  zu vermeiden.

### 5.3.4 Phasenellipse und Emittanz

Die Bewegungsgleichung eines Teilchens ist der Realteil von Gl. 5.54, also

$$y(s) = a\sqrt{\beta(s)} \cos(\psi(s) + \delta) \quad (5.59)$$

$$\Rightarrow y'(s) = -\frac{a}{\sqrt{\beta(s)}} [\alpha(s) \cos(\psi(s) + \delta) + \sin(\psi(s) + \delta)] \quad (5.60)$$

wobei Gl. 5.52 verwendet wurde. Um nun die Form der Trajektorie im  $(y, y')$  Phasenraum zu erhalten, geht man folgendermaßen vor: man erhält aus Gl. 5.59

$$\cos(\psi(s) + \delta) = \frac{y}{a\sqrt{\beta(s)}} .$$

In Gl. 5.60 eingesetzt ergibt sich

$$\sin(\psi(s) + \delta) = \frac{\sqrt{\beta(s)}y'}{a} + \frac{\alpha(s)y}{a\sqrt{\beta(s)}} .$$

Wendet man nun  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  an, erhält man

$$\frac{y^2}{\beta(s)} + \left( \frac{\alpha(s)}{\sqrt{\beta(s)}}y + \sqrt{\beta(s)}y' \right)^2 = a^2$$

und mit Gl. 5.50 folgt

$$\gamma(s)y^2(s) + 2\alpha(s)y(s)y'(s) + \beta(s)y'^2(s) = a^2 . \quad (5.61)$$

Gl. 5.61 ist die allgemeine Gleichung einer Ellipse in der  $y - y'$  Ebene (siehe [16] Anhang C). Beobachtet man also ein Teilchen an einem festen Ort  $s$ , so findet man es nach jedem Umlauf auf, i.a. verschiedenen Punkten, auf der durch Gl. 5.61 definierten Ellipse im Phasenraum.

Die Form der Ellipse ändert sich i.a. mit  $s$ , was nach dem *Liouville'schen Satz* konstant

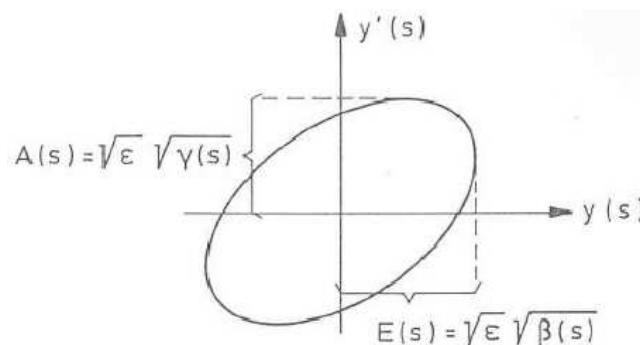


Abbildung 26: Phasenraumellipse; der Maximalwert von  $y'(s)$  wird Divergenz (*divergence*), der von  $y(s)$  Hülle (*envelope*) genannt

bleibt ist die Fläche  $A_{\text{ellipse}} = \pi a^2$ . Da diese, den Strahl umschließende, Ellipse ein sehr wichtiger Parameter eines Beschleunigers ist, definiert man als neue Größe die *Emittanz*  $\epsilon$ :

$$A_{\text{ellipse}} = \pi \epsilon ; \quad (5.62)$$

### 5.3.5 Dispersion

Bis hier wurden nur Teilchen mit einem Idealimpuls  $p = p_0$  betrachtet. Nun sollen kurz einige Größen beschrieben werden, die charakteristisch für das Verhalten eines Teilchens mit  $p = p_0 + \Delta p$  sind.

Ein Teilchen mit  $p > p_0$  z.B. bewegt sich nicht mehr auf dem *design orbit*, sondern auf einer Bahn mit  $\rho = \rho_0 + x_D$  (siehe Abb. 27). Beginnt das Teilchen seine Bewegung nicht auf exakt diesem Kreis, so vollführt es Betatronschwingungen um diese längere Bahn. Die Dispersion  $D(s)$  wird definiert durch

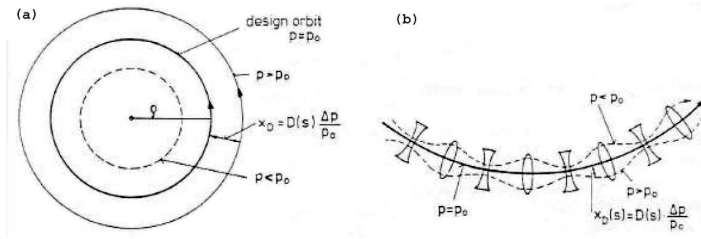


Abbildung 27: Idealbahnen für Teilchen mit Impuls  $p \neq p_0$ ; (a) in einem konstanten Dipolfeld ( $D(s)=\text{const.}$ ), und (b) in einer stark fokussierenden Quadrupol Anordnung

$$x_D(s, \frac{\Delta p}{p_0}) = D(s) \cdot \frac{\Delta p}{p_0} \quad (5.63)$$

Ein Parameter für die relative Änderung der Bahnlänge  $\Delta C$ , abhängig von der relativen Impulsabweichung  $\Delta p$ , ist der *momentum compaction factor* (Impulsverdichtungsfaktor)  $\alpha$ .

$$\frac{\Delta C}{C} = \alpha \frac{\Delta p}{p_0} \quad (5.64)$$

Eine kurze Rechnung liefert

$$\alpha = \frac{1}{C} \oint \frac{D(s)}{\rho(s)} ds \quad (5.65)$$

wobei  $C$  der Umfang der Idealbahn ist, und  $\rho(s)$  der lokale Bahnradius.

Teilchen mit  $\Delta p \neq 0$  werden in Quadrupolmagneten unterschiedlich fokussiert, was wiederum zu einer Änderung ihres  $Q$ -Wertes führt. Das Maß von  $\Delta Q$  wird durch die *Chromatizität*  $\xi$  beschrieben,

$$\Delta Q = \xi \frac{\Delta p}{p_0} \quad (5.66)$$

Man kann  $\xi$  berechnen und erhält:

$$\xi = -\frac{1}{4\pi} \oint \beta(s) K(s) ds \quad (5.67)$$

Man erkennt, dass  $\xi$  gross ist, wenn  $K(s)$  und  $\beta(s)$  gross sind, also in starken Quadrupolfeldern und in Regionen an denen die Betafunktion hohe Werte annimmt (z.B. die Interaktionszone in Collidern).

Da die aus linearen Feldern (z.B. Dipol, Quadrupol) entstehende Chromatizität (natürliche- oder lineare Chrom.) schon relativ hohe Werte annimmt (HERA Speicherring:  $\xi = -60$ ), führt das schon bei einer Impulsbreite von  $\pm 10^{-3}$  zu einem  $\Delta Q \approx 0.12$ . Dadurch werden Teile des Strahls auf Resonanzlinien ( $Q$  ganzzahlig) gebracht und gehen somit früher oder später verloren. Um das zu verhindern, werden in die lineare Struktur Sextupolmagnete vor die Quadrupole gebracht. Die Sextupole verhalten sich wie Quadrupole für Impulsabweichungen, Teilchen mit abweichenden Impulsen werden auf die Sollbahn "gedrückt".

## 6 Longitudinale Phasenstabilität

Die in Kap. 2.2 angedeutete Phasenstabilität während der Beschleunigung in einem elektrischen Feld, soll nun genau beschrieben werden. Ziel ist, die Energie- und Zeitdifferenz eines asynchronen Teilchens,  $\Delta t_n = t_n - t_s$  und  $\Delta E_n = E_n - E_{s,n}$ , relativ zum synchronen Teilchen an der  $n$ -ten Beschleunigungskavität zu berechnen (Bezeichnungen siehe Abb. 28).

Der Energiegewinn eines asynchronen Partikels zwischen der  $n$ -ten und  $(n + 1)$ -ten

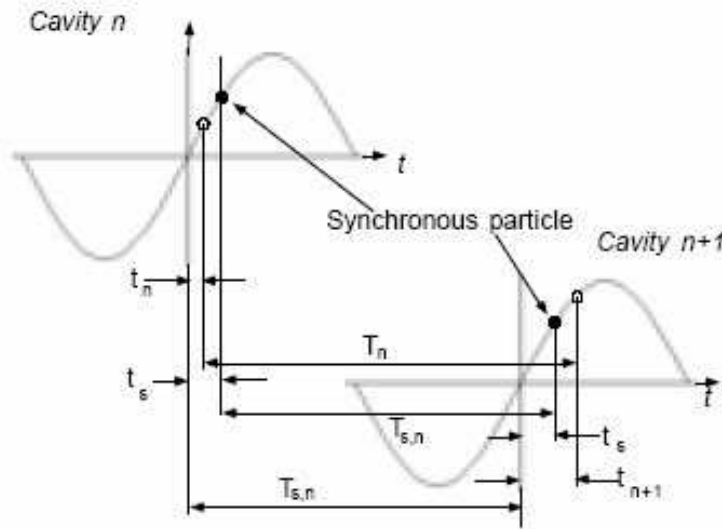


Abbildung 28:

Kavität ist

$$E_{n+1} - E_n = \frac{dE_n}{dn} = eU_n \sin(\omega t_n) ,$$

analog gilt für das synchrone Teilchen

$$\frac{dE_{s,n}}{dn} = eU_n \sin(\omega t_s) .$$

Daraus folgt

$$\frac{d}{dn}(\Delta E_n) = eU_n [\sin(\omega t_n) - \sin(\omega t_s)] , \quad (6.1)$$

wobei  $U_n$  die effektive Beschleunigungsspannung der  $n$ -ten Kavität ist.

Nun soll die Änderung der Transitzeit  $T_n$  zwischen den Hohlräumen  $n$  und  $n + 1$  bestimmt werden. Wie man aus Abb. 28 entnehmen kann, gilt

$$t_{n+1} = t_n + T_n - T_{s,n} \Rightarrow$$

$$t_{n+1} - t_n = \frac{dt_n}{dn} = T_n - T_{s,n} . \quad (6.2)$$

Betrachtet man nur sehr kleine Änderungen  $\Delta E_n$ , so ist eine Taylorentwicklung bis zur ersten Ordnung sinnvoll.

$$T_n(E_n) = T_{s,n}(E_{s,n}) + \left. \frac{dT}{dE} \right|_{E_{s,n}} (E_n - E_{s,n})$$

$$T_n(E_n) - T_{s,n}(E_{s,n}) = \left. \frac{dT}{dE} \right|_{E_{s,n}} \Delta E_n \quad (6.3)$$

Nun verwendet man  $\frac{dt}{t} = \eta_C \frac{dp}{p}$ , wobei  $\eta_C$  die sog. *momentum compaction* ([17], S.272) ist (für Linacs gilt  $\eta_C = -\gamma^{-2}$ ), und  $\frac{dp}{p} = \frac{1}{\beta^2} \frac{dE}{E}$  ([16], Anhang B). Es ergibt sich

$$\frac{dt}{t} = \frac{\eta_C}{\beta^2} \frac{dE}{E} \Rightarrow \left. \frac{dT}{dE} \right|_{E_{s,n}} = T_{s,n} \frac{\eta_C}{E_{s,n} \beta_{s,n}^2}, \quad (6.4)$$

wobei  $\beta = \frac{v}{c}$  und  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$  ist. Für die Transitzeit des synchronen Teilchens gilt (Index  $n$  weglassen,  $k$  ist die Anzahl der Schwingungen der Beschleunigungsfrequenz zwischen den Kavitäten)

$$T_s = \frac{L}{\beta_s c} = \frac{k \beta_s \lambda}{\beta_s c} = \frac{k \lambda}{c},$$

und es folgt

$$\frac{dt_n}{dn} \stackrel{(6.2)}{=} T_n - T_s \stackrel{(6.3)}{=} \left. \frac{dT}{dE} \right|_{E_s} \Delta E_n \stackrel{(6.4)}{=} \frac{k \lambda \eta_C}{E_s \beta_s^2 c} \Delta E_n.$$

Die zu lösenden Differentialgleichungen sind also

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dt_n}{dn} &= \frac{k \lambda \eta_C}{E_s \beta_s^2 c} \Delta E_n \\ \frac{d}{dn}(\Delta E_n) &= eU [\sin(\omega t_n) - \sin(\omega t_s)] \end{aligned}} \quad (6.5)$$

Leitet man die erste ab und setzt dann die zweite ein, erhält man

$$\frac{d^2 t_n}{dn^2} = \frac{eU k \lambda \eta_C}{E_s \beta_s^2 c} [\sin(\omega t_n) - \sin(\omega t_s)] + \Delta E_n \frac{k}{c} \frac{d}{dn} \left[ \frac{\lambda \eta_C}{E_s \beta_s^2} \right]$$

Nimmt man nun an, dass die Energie des synchronen Teilchens  $E_s$  und die Wellenlänge  $\lambda$  der Beschleunigungsfrequenz nur sehr langsam mit  $n$  variieren, erhält man

$$\frac{d^2 t_n}{dn^2} = \frac{eU k \lambda \eta_C}{E_s \beta_s^2 c} [\sin(\omega t_n) - \sin(\omega t_s)] \quad (6.6)$$

#### 1. Kleine Amplituden:

Wenn man nur kleine Abweichungen ( $\omega \Delta t_n = \omega(t_n - t_s) \ll 1$ ) betrachtet, kann man approximieren

$$\sin(\omega t_n) - \sin(\omega t_s) \approx \omega \Delta t_n \cos \phi_s,$$

mit  $\phi_s = \omega t_s$ . Gl. 6.6 vereinfacht sich dann zu

$$\frac{d^2}{dn^2}(\Delta t_n) + (2\pi Q_s)^2 \Delta t_n = 0,$$

$Q_s^2 = -\frac{eUk\eta_C \cos \phi_s}{2\pi E_s \beta_s^2}$  ist die Zahl der Schwingungen zwischen zwei Kavitäten (*small amplitude synchrotron oscillation tune* (vgl. Betatron-tune Kap. 5.3.3)). Für eine stabile Bewegung muss  $Q_s$  positiv sein. Speziell für einen Linac gilt  $\eta_C = -\gamma_s^{-2}$  und damit  $Q_s^2 = \frac{eUk \cos \phi_s}{2\pi E_s \beta_s^2 \gamma_s^2}$ , was zu einer stabilen Bewegung für einen Bereich von  $-\frac{\pi}{2} \leq \phi_s \leq \frac{\pi}{2}$  führt. Mit  $\frac{dt_n}{dn} = \frac{k\lambda\eta_C}{E_s \beta_s^2 c} \Delta E_n$  folgen die Lösungen

$$\Delta t_n = \Delta t_0 \cos(2\pi Q_s n) + \Delta E_0 \frac{\eta_C k \lambda}{2\pi \beta_s^2 E_s c Q_s} \sin(2\pi Q_s n) , \quad (6.7)$$

$$\Delta E_n = \Delta E_0 \cos(2\pi Q_s n) - \Delta t_0 \frac{2\pi \beta_s^2 E_s c Q_s}{\eta_C k \lambda} \sin(2\pi Q_s n) ; \quad (6.8)$$

In Matrixform:

$$\begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta E \end{pmatrix}_n = \begin{pmatrix} \cos 2\pi Q_s n & \frac{\eta_C k \lambda}{2\pi \beta_s^2 E_s c Q_s} \sin 2\pi Q_s n \\ -\frac{2\pi \beta_s^2 E_s c Q_s}{\eta_C k \lambda} \sin 2\pi Q_s n & \cos 2\pi Q_s n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta E \end{pmatrix}_0$$

Wo man nun analog zur transversalen Bewegung (Kap. 5.3.3) einen longitudinalen Twiss Parameter  $\beta_L$  einführen kann:

$$\beta_L = \frac{|\eta_C| k \lambda}{2\pi \beta_s^2 E_s c Q_s} = \frac{\lambda}{c \beta_s} \sqrt{-\frac{\eta_C k}{2\pi e U E_s \cos \phi_s}} \quad (6.9)$$

Damit  $\beta_L$  immer positiv bleibt wird hier  $|\eta_C|$  verwendet, was bei  $\eta_C < 0$  eine Neudefinition von  $\Delta E_n \equiv E_{s,n} - E_n$  erfordert. Damit ist die longitudinale Bewegung

$$\begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta E \end{pmatrix}_n = \begin{pmatrix} \cos 2\pi Q_s n & \beta_L \sin 2\pi Q_s n \\ -\frac{1}{\beta_L} \sin 2\pi Q_s n & \cos 2\pi Q_s n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta E \end{pmatrix}_0 \quad (6.10)$$

Man kann leicht nachrechnen, dass

$$\frac{1}{\beta_L} (\Delta t_n)^2 + \beta_L (\Delta E_n)^2 = \text{const.} \equiv \varepsilon_L \quad (6.11)$$

ist.  $\varepsilon_L$  ist die longitudinale Emittanz. Im longitudinalen Phasenraum  $(\Delta E_n, \Delta t_n)$  bilden diese Variablen, an verschiedenen Kavitäten ausgewertet, wieder eine Ellipse mit dem Flächeninhalt  $A = \pi \varepsilon_L$  (Abb. 29). Für die maximalen Abweichungen gilt

$$\begin{aligned} (\Delta E)_{\max} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_L}{\beta_L}} = \left( \frac{\varepsilon_L^2 2\pi m c^2 e U \beta_s^2 \gamma_s^3 \cos \phi_s}{k \lambda^2} \right)^{\frac{1}{4}} \\ (\Delta t)_{\max} &= \sqrt{\varepsilon_L \beta_L} = \left( \frac{\varepsilon_L^2 k \lambda^2}{2\pi m c^2 e U \beta_s^2 \gamma_s^3 \cos \phi_s} \right)^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Man erkennt, dass  $(\Delta E)_{\max} \propto (U \beta_s^2 \gamma_s^3)^{\frac{1}{4}}$  und  $(\Delta t)_{\max} \propto (U \beta_s^2 \gamma_s^3)^{-\frac{1}{4}}$ , was bedeutet, dass die Streubreite der Energie, mit zunehmender Beschleunigungsspannung  $U$  und höherer Teilchenenergie, zunimmt. Die Abweichung in der Zeit nimmt dagegen ab. Man bezeichnet diesen Effekt auch als adiabatische Dämpfung (im longitudinalen Phasenraum).



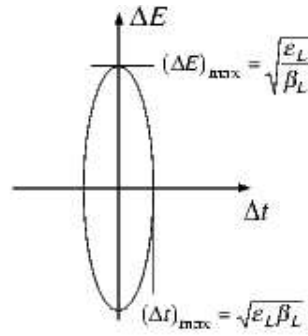


Abbildung 29:

## 2. Große Amplituden:

Um die Bewegung auch für große Amplituden zu beschreiben, geht man wiederum von Gl. 6.5 aus. Lässt man den Index  $n$  weg, folgt mit der Kettenregel,

$$\frac{d}{d\phi}(\Delta E) = \frac{d}{dn}(\Delta E) \frac{dn}{dt} \frac{dt}{d\phi}, \quad \phi = \omega t \quad :$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\phi}(\Delta E) &= eU [\sin \phi - \sin \phi_s] \frac{E_s \beta_s^2 c}{\omega \lambda k \eta_C \Delta E} \\ &= -[\sin \phi - \sin \phi_s] \frac{1}{\cos \phi_s \omega^2 \beta_L^2 \Delta E} \end{aligned}$$

Für  $\beta_L$  siehe Gl. 6.9. Somit

$$\Delta E d(\Delta E) = - \frac{[\sin \phi - \sin \phi_s]}{\cos \phi_s \omega^2 \beta_L^2} d\phi$$

Integriert man beide Seiten erhält man

$$\frac{1}{2}(\Delta E)^2 = \frac{[\cos \phi + \phi \sin \phi_s] - [\cos \phi_0 + \phi_0 \sin \phi_s]}{\cos \phi_s \omega^2 \beta_L^2}$$

mit der Phase  $\phi_0$  für  $\Delta E = 0$ . Dies kann man nun umschreiben zu

$$\begin{aligned} \omega \beta_L (\Delta E)^2 - \frac{2}{\beta_L \omega \cos \phi_s} (\cos \phi + \phi \sin \phi_s) \\ = - \frac{2}{\beta_L \omega \cos \phi_s} (\cos \phi_0 + \phi_0 \sin \phi_s) \approx \text{const.} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Eine typische Kurve im  $(\Delta E, \phi)$  Phasenraum, die durch diese Gleichung definiert ist, ist in Abb. 30 skizziert. Eine stabile Bewegung ist bis zu

$$\phi_{0,\text{max}} = \pi - \phi_s$$

möglich. Die letzte gerade noch beschränkte Phasenraumtrajektorie nennt man *Separatrix*, da sie die stabilen von den instabilen Bewegungen trennt. Alle beschränkten Bahnen befinden sich also in der von der Separatrix begrenzten Fläche (*bucket*, siehe Abb. 31).

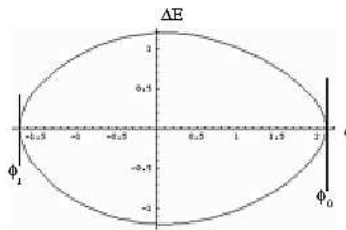


Abbildung 30: Exemplarische longitudinale Phasenraumtrajektorie

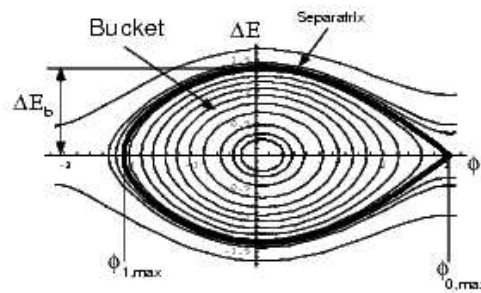


Abbildung 31: Separatrix und *bucket*, die beschränkten Bewegungen verlaufen im *bucket*, die instabilen ausserhalb

Die "Höhe" des *buckets*,  $\Delta E_b$ , legt die Energieakzeptanz des Beschleunigers fest. Berechnet wird diese wenn man  $\phi = \phi_s$  und  $\Delta E = \Delta E_b$  setzt, zu

$$\Delta E_b = \frac{2\sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{2} - \phi_s\right) \tan \phi_s}}{\omega\beta_L} \quad (6.13)$$

Parameter	Symbol	Beschreibung
Luminosität		
$\beta$ – Funktion		
Betatrontune		
Emittanz		
Chromatizität		

Tabelle 2:

### Teil III

## Synchrotronstrahlung

Es ist eine elementare Eigenschaft von Ladungen, dass sie, während einer beschleunigten Bewegung, Energie in Form elektromagnetischer Wellen abstrahlen. Diesen Effekt kann man in Kreisbeschleunigern (v.a. für Elektronen) nicht vernachlässigen. Bei Linearbeschleunigern und schwereren Teilchen (z.B. Protonen, Ionen) spielt er jedoch kaum eine Rolle.

Diese Art der Strahlung hat der Techniker Floyd Haber 1947 eher zufällig an einem Synchrotron in den USA beobachtet. Man bezeichnet sie deshalb als Synchrotronstrahlung.

### 7 Strahlung beschleunigter nichtrelativistischer Teilchen

Im nichtrelativistischen Fall einer Ladung  $e$ , die sich mit  $\vec{p} = m_0\vec{v}$  bewegt, gilt für die totale abgestrahlte Leistung die Formel (entdeckt von Larmor)

$$P_s = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 m_0^2 c^3} \left( \frac{d\vec{p}}{dt} \right)^2. \quad (7.1)$$

Die azimutale Winkelverteilung ist die eines Hertz'schen Dipols

$$\frac{P_s}{\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 m_0^2 c^3} \left( \frac{d\vec{p}}{dt} \right)^2 \sin^2 \Psi \quad (7.2)$$

Diese von nichtrelativistischen Teilchen emittierte Strahlung ist jedoch fast immer zu vernachlässigen.

### 8 Strahlung beschleunigter relativistischer Teilchen

Im relativistischen Fall muss man Gl. 7.1 in eine Lorentz-invariante Form bringen. Geht man zur Eigenzeit und zum 4er-Impuls über

$$dt \longrightarrow d\tau = \frac{1}{\gamma} dt, \text{ mit } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (8.1)$$

$$\left( \frac{dP_\mu}{d\tau} \right)^2 \longrightarrow \left( \frac{d\vec{p}}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{dE}{d\tau} \right)^2 \quad (8.2)$$

erhält man

$$P_s = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0 (m_0 c^2)^2} \left[ \left( \frac{d\vec{p}}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{dE}{d\tau} \right)^2 \right] \quad (8.3)$$

#### 8.1 Lineare Beschleunigung: $\frac{d\vec{v}}{d\tau} \parallel \vec{v}$

Differenziert man die relativistische Energie-Impuls Beziehung

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$$

nach  $\tau$  folgt

$$E \frac{dE}{d\tau} = c^2 p \frac{dp}{d\tau} , \quad (8.4)$$

was sich mit  $E = \gamma m_0 c^2$  und  $p = \gamma m_0 v$  zu

$$\frac{dE}{d\tau} = v \frac{dp}{d\tau}$$

vereinfacht. In Gl. 8.3 eingesetzt ergibt sich

$$P_s = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0 (m_0 c^2)^2} \left( \frac{dp}{dt} \right)^2 . \quad (8.5)$$

Da in einem Linearbeschleuniger meist der Energiegewinn pro Länge bekannt ist, und mit  $x(t) = v \cdot t$  aus Gl. 8.4,  $dp/dt = dE/dx$  folgt, gilt für die abgestrahlte Leistung

$$P_s = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0 (m_0 c^2)^2} \left( \frac{dE}{dx} \right)^2 . \quad (8.6)$$

Ein guter Wert für moderne Linacs ist  $dE/dx \approx 15 \text{ MeV/m} = 2.4 \cdot 10^{-12} \text{ J/m}$ , womit sich eine Strahlungsleistung von  $P_s \approx 4 \cdot 10^{-17} \text{ Watt}$  ergibt. Der Wirkungsgrad aus der gesamten zugeführten Leistung  $dE/dt = v dE/dx$ , mit der Annahme  $v \approx c$ , und der Strahlungsleistung ist damit

$$\eta = \frac{P_s}{dE/dt} \approx 5.5 \cdot 10^{-14} . \quad (8.7)$$

Man kann die bei longitudinaler Beschleunigung abgestrahlte Energie also guten Gewissens vernachlässigen.

## 8.2 Kreisbeschleunigung: $\frac{d\vec{v}}{d\tau} \perp \vec{v}$

Bei einer Kreisbewegung erfolgt die Beschleunigung immer senkrecht zur Bewegungsrichtung. Die Energie bleibt deshalb konstant und Gl. 8.3 reduziert sich auf

$$P_s = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0 (m_0 c^2)^2} \left( \frac{dp}{d\tau} \right)^2 = \frac{e^2 c \gamma^2}{6\pi\epsilon_0 (m_0 c^2)^2} \left( \frac{dp}{dt} \right)^2 \quad (8.8)$$

Bei einer Kreisbewegung um den infinitesimalen Winkel  $d\alpha$  ändert sich der Impuls um den Betrag  $dp = p d\alpha$ . Es folgt direkt

$$\frac{dp}{dt} = p\omega = p \frac{v}{R} ,$$

wobei  $R$  der Ablenkradius und  $\omega$  die Kreisfrequenz ist. Setzt man das nun in Gl. 8.8 ein, nähert wieder  $v \approx c \Rightarrow E = pc$  und substituiert noch  $\gamma = E/m_0 c^2$ , erhält man für die Strahlungsleistung bei transversaler Beschleunigung

$$P_s = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0 (m_0 c^2)^4} \frac{E^4}{R^2} . \quad (8.9)$$

Die Teilchenruhemasse geht reziprok mit der 4. Potenz (!) ein, was bei Elektronen ( $m_0 \approx 0.511 \text{ MeV}$ ) und Protonen ( $m_0 \approx 940 \text{ MeV}$ ) zu einem Verhältnis von

$$\frac{P_{s,e}}{P_{s,p}} = \left( \frac{m_p c^2}{m_e c^2} \right)^4 \approx 1.15 \cdot 10^{13}$$

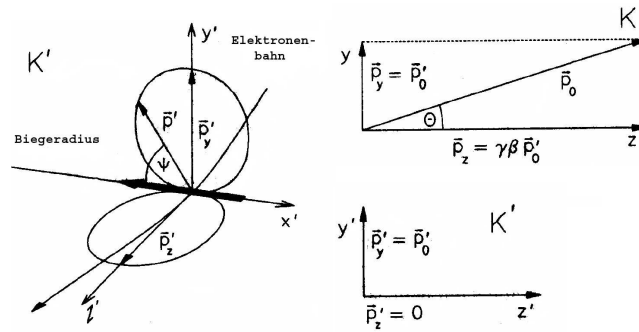


Abbildung 32: Transformation eines Impulses vom mitbewegten System  $K'$  in das Laborsystem  $K$

führt. Man erkennt, dass die Strahlung nur bei Elektronen eine Rolle spielt, und für massivere Teilchen erst bei sehr hohen Energien an Bedeutung gewinnt. Eine wichtige Größe ist der mittlere Energieverlust pro Umlauf  $\Delta E$ . Nimmt man eine kontinuierliche Abstrahlung mit konstanter Rate, auf einer Bahn, die in allen Ablenkmagneten den gleichen konstanten Radius  $R$  hat, an, folgt

$$\Delta E = \oint P_s dt = P_s t_b = P_s \frac{2\pi R}{c} .$$

Die Zeit  $t_b$ , die sich das Teilchen in den Ablenkmagneten aufhält, ist im allgemeinen kleiner als die gesamte Umlaufzeit, da die meisten Synchrotrons ebenfalls Abschnitte enthalten, auf denen keine transversale Ablenkung stattfindet (z.B. Beschleunigungsstrecken). Mit Gl. 8.9 ergibt sich

$$\Delta E = \frac{e^2}{3\epsilon_0(m_0c^2)^4} \frac{E^4}{R} . \quad (8.10)$$

Da man diese Leistungsverluste durch die Hochfrequenzsender wieder ausgleichen muss, versucht man  $R$  so gross wie möglich zu machen, was allerdings sehr lange Tunnelanlagen bedeutet (z.B. HERA-e Tab. 4). Bei Energien über  $100 GeV$  (LEP-II) wird der Aufwand enorm, und man geht wieder zu Linearbeschleunigern über.

### 8.3 Winkelverteilung relativistischer Synchrotronstrahlung

Eine Vorstellung wie die Winkelverteilung der Synchrotronstrahlung gegenüber der eines Hertz'schen Dipols aussieht gewinnt durch die Lorentz-Transformation. Betrachtet wird ein Elektron, das ein Photon emittiert. Das Photon soll im Ruhesystem  $K'$  des Elektrons, senkrecht zur Bewegungsrichtung ausgestrahlt werden. Für den Viererimpuls gilt dann

$$p'_\mu = \begin{pmatrix} p_t \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E'/c \\ 0 \\ p'_0 \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (8.11)$$

Durch die entsprechende Lorentz-Transformation erhält man den Viererimpuls im La-

borsystem  $\mathbf{K}$

$$p_\mu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E'/c \\ 0 \\ p'_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma E'/c \\ 0 \\ p'_0 \\ \gamma\beta E'/c \end{pmatrix}. \quad (8.12)$$

Mit  $|\vec{p}'_0| = \frac{E'}{c}$  folgt für den Winkel  $\theta$ , mit dem das Photon gegen die Flugrichtung des Elektrons emittiert wird

$$\tan \theta = \frac{p_y}{p_z} = \frac{p'_0}{\beta\gamma p'_0} \approx \frac{1}{\gamma} \quad (8.13)$$

Für grosse  $\gamma$ , kann man  $\tan \theta \approx \theta$  nähern. Die axialsymmetrische Verteilung in  $\mathbf{K}'$  transformiert sich also zu einer scharf nach vorne gebündelten Verteilung mit Öffnungswinkel  $\Theta = 2 \cdot 1/\gamma$  in  $\mathbf{K}$  (Abb. 33).

Zahlenbeispiel.:  $E_{e^-} = 1 \text{ GeV} \leadsto \gamma = 1957 \leadsto \theta = 0.03^\circ$

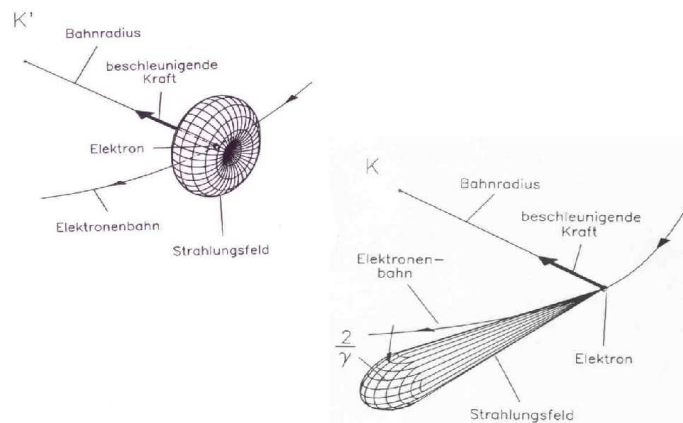


Abbildung 33: Eine Strahlungsverteilung im Ruhesystem  $\mathbf{K}'$  und im Laborsystem  $\mathbf{K}$ ;

## 9 Erzeugung von Synchrotronstrahlung in Speicherringen

Synchrotronstrahlung ist wegen ihrer sehr scharfen Vorwärtsbündelung, der extrem hohen Intensität und des breiten Spektrums, ein wichtiges Werkzeug der modernen Forschung (z.B. Photoemissionsspektroskopie) und wird auch für industrielle Anwendungen immer interessanter.

Um Synchrotronstrahlung zu erzeugen, verwendete man zunächst Synchrotrons. Man ging dann zu Speicherringen als Quellen über, da diese bei einer konstanten Energie, über viele Stunden in der Lage sind, einen sehr stark fokussierten Strahl zu speichern, und damit kontinuierlich Strahlung, mit festen Parametern zu generieren. Die Strahlung wurde in beiden Fällen in den Ablenkmagneten gewonnen.

Durch die Elektronenbahn im Dipolmagnet ergibt sich ein horizontal weit ausgedehnter Strahlungsfächer (Abb. 34). Man kann den kleinen Öffnungswinkel ( $\theta \approx 1/\gamma$ ) also nur vertikal nutzen, und verliert einen Grossteil der Strahlung durch Blenden.

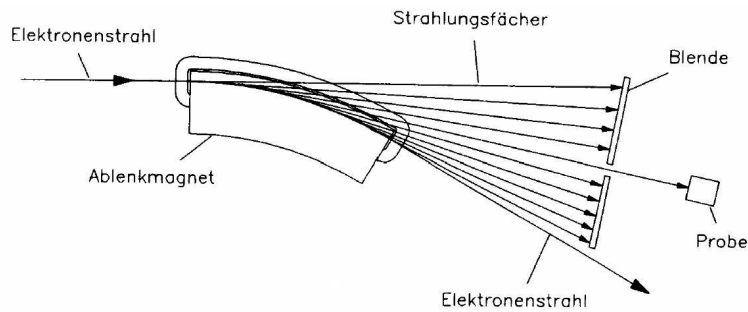


Abbildung 34: Horizontaler Strahlungsfächer der Synchrotronstrahlung, erzeugt durch Ablenkung der Teilchen in einem Dipolmagneten

## 9.1 Undulatoren und Wiggler

Heute werden in Synchrotronstrahlungsquellen (speziell für diesen Zweck ausgelegte Speicherringe; erstmals 1968 mit TANTALUS) neben Ablenkmagneten besonders sogenannte *Insertion Devices* als Strahlungsquellen benutzt. Der Name rührt daher, dass sie auf die Optik des Elektronenbeschleunigers keinen Einfluss haben sollen. Sie können daher im nachhinein "eingefügt" werden, wobei sich die Strahleigenschaften nicht ändern.

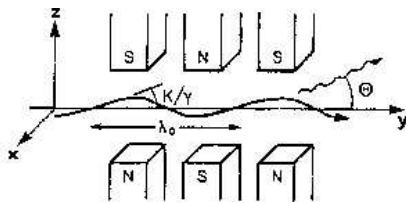


Abbildung 35: Prinzipieller Aufbau eines *Insertion Device* mit vereinfachter Teilchenbahn; das Magnetfeld ist periodisch, und hat im Idealfall nur Komponenten in der  $yz$ -Ebene;

In Abb. 35 ist eine periodische Magnetstruktur dargestellt. Man sieht am periodischen Feldverlauf, dass man durch eine geeignete Anordnung und Dimensionierung der Magneten, das Feldintegral über die ganze Struktur zum Verschwinden bringen kann und es somit keinen Einfluss auf den Beschleuniger hat. Diese Art von *Insertion Devices* heißen je nach Auslegung Undulatoren oder Wiggler. Es wird durch die alternierende Magnetstruktur ein sinusförmiges vertikales Feld mit der Periode  $\lambda_0$  erzeugt. Die daraus resultierende Ablenkung des Elektronenstrahls ist in Abb. 35 dargestellt.

## 9.2 Wiggler- / Undulatorfeld

Betrachtet man Abb. 35, so muss das Feld entlang der Strahlachse periodisch verlaufen. Daher kann man das Potential in der Form

$$\phi(s, z) = f(z) \cos(k_u s) \quad (9.1)$$

schreiben. Aus der Annahme  $\phi(x) = \text{const.}$  und  $\nabla^2 \phi(s, z) = 0$  folgt

$$f(z) = C \sinh(k_u z) .$$

Damit ergibt sich für die vertikale Feldkomponente

$$B_z(s, z) = \frac{\partial \phi}{\partial z} = k_u C \cosh(k_u z) \cos(k_u s) . \quad (9.2)$$

Die Konstante  $C$  bestimmt man aus der Anfangsbedingung, dass die Feldstärke in der Mitte der Pole (Koordinaten  $(s = \lambda_u/4, z = g/2)$ , Abb. 36) den Wert  $B_0$  hat. Es folgt also

$$B_0 = B_z(0, \frac{g}{2}) = k_u A \cosh\left(\pi \frac{g}{\lambda_u}\right) \Rightarrow A = \frac{B_0}{k_u \cosh\left(\pi \frac{g}{\lambda_u}\right)} .$$

Man erhält

$$B_z(s, z) = \frac{B_0}{\cosh\left(\pi \frac{g}{\lambda_u}\right)} \cosh(k_u z) \cos(k_u s) , \quad (9.3)$$

und analog

$$B_s(s, z) = \frac{B_0}{\cosh\left(\pi \frac{g}{\lambda_u}\right)} \sinh(k_u z) \sin(k_u s) . \quad (9.4)$$

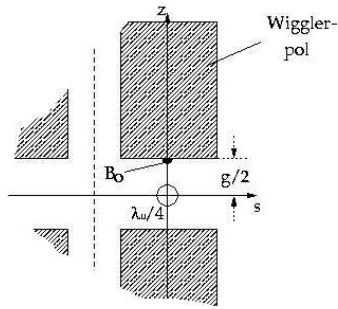


Abbildung 36: Bestimmung der Integrationskonstanten, durch  $B_0 = B_z(0, \frac{g}{2})$ , mit Ursprung bei  $s = \frac{\lambda_u}{4}$

Den maximalen Wert hat das periodische Feld auf der Strahlachse ( $z = 0$ )

$$\tilde{B} = \frac{B_0}{\cosh\left(\pi \frac{g}{\lambda_u}\right)} . \quad (9.5)$$

### 9.3 Bewegungsgleichung im Wiggler/Undulator

In diesem Kapitel werden die Bewegungsgleichungen für ein Teilchen in einem Wiggler/Undulator Magneten ausgearbeitet, wodurch auch der Unterschied zwischen Wiggler und Undulator klar wird.

Ein Elektron erfährt im U/W Magnet die Lorentzkraft

$$\dot{\vec{p}} = m_e \gamma \dot{\vec{v}} = e \vec{v} \times \vec{B} .$$

Vernachlässigt man  $v_y$  und betrachtet einen horizontal unendlich ausgedehnten Magneten ( $B_x = 0$ ), so folgt

$$\dot{\vec{v}} = \frac{e}{m_e \gamma} \begin{pmatrix} -v_s B_z \\ -v_x B_s \\ v_x B_z \end{pmatrix} . \quad (9.6)$$



Und man erhält für die Bewegung in der  $s - x$  Ebene die gekoppelten Differentialgleichungen:

$$\ddot{x} = -\dot{s} \frac{e}{m_e \gamma} B_z(s) \quad (9.7)$$

$$\ddot{s} = \dot{x} \frac{e}{m_e \gamma} B_z(s) \quad (9.8)$$

Um dieses System zu lösen, nutzt man aus, dass die longitudinale Geschwindigkeit  $v_s$ , bei relativistischen Elektronen dominiert und als nahezu konstant angesehen werden kann. Es gilt also in guter Näherung  $v_x \ll c$  und  $\dot{s} = \beta c \approx \text{const.}$ , und es folgt aus Gl. 9.8

$$\ddot{x} = -\frac{\beta c e \tilde{B}}{m_e \gamma} \cos(k_u s) \quad (9.9)$$

Macht man nun den in der Strahloptik üblichen Übergang,  $t \rightarrow s$ , ergibt sich

$$x'' = -\frac{e \tilde{B}}{m_e \beta c \gamma} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_u} s\right) \quad (9.10)$$

Integration und  $\beta \approx 1$  liefert

$$x'(s) = \frac{\lambda_u e \tilde{B}}{2\pi m_e \gamma c} \sin(k_u s) \quad (9.11)$$

$$x(s) = \frac{\lambda_u^2 e \tilde{B}}{4\pi^2 m_e \gamma c} \cos(k_u s)$$

Der maximale Winkel der Teilchenbahn gegen die  $s$ -Achse ist somit

$$\theta_{\max} = x'_{\max} = \frac{1}{\gamma} \underbrace{\frac{\lambda_u e \tilde{B}}{2\pi m_e c}}_K = \frac{K}{\gamma} \quad (9.12)$$

$K$  ist der *Wiggler-* oder *Undulatorparameter*, und ist ein Maß für die ablenkende Wirkung des Magneten. Anhand von  $K$  unterscheidet man nun:

$$\text{W/U Magnet} = \begin{cases} \text{Undulator} & \text{wenn } K \leq 1 \text{ d.h. } \theta_{\max} \leq 1/\gamma \\ \text{Wiggler} & \text{wenn } K > 1 \text{ d.h. } \theta_{\max} > 1/\gamma \end{cases}$$

Bei Undulatoren ist die Ablenkung sehr schwach, was dazu führt, dass auch der Öffnungswinkel der emittierten Strahlung sehr klein ist. Wiggler dagegen lenken die Teilchen stärker ab, was zu einer vergleichsweise breit gefächerten Strahlung führt.

Es soll nun die longitudinale Geschwindigkeitsmodulation, die durch die transversale Geschwindigkeitskomponente  $v_x$  verursacht wird (Gl. 9.8), untersucht werden, um die Teilchenbewegung in einem mitbewegten Koordinatensystem (feste mittlere Geschwindigkeit  $\tilde{s}$ ) zu verstehen. Um  $\tilde{s}$  zu berechnen, wechselt man in Gl. 9.11 wieder den Parameter,  $\dot{x} = \beta c x'$ ,  $s = \beta c t$  und erhält

$$\dot{x}(t) = \beta c \frac{K}{\gamma} \sin(\omega_u t) \quad \text{mit } \omega_u = k_u \beta c \quad (9.13)$$

Aus Abb. 37) kann man elementar-geometrisch die Beziehung

$$\dot{s}(t) = c \sqrt{1 - \left( \frac{1}{\gamma^2} + \frac{\dot{x}^2}{c^2} \right)}$$

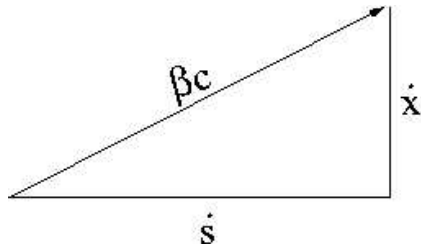


Abbildung 37: Teilchengeschwindigkeit, zerlegt in Anteile parallel und senkrecht zur Strahlachse

ableiten, welche gut durch

$$\dot{s}(t) \simeq c \left[ 1 - \frac{1}{2\gamma^2} \left( 1 + \frac{\gamma^2}{c^2} \dot{x}^2 \right) \right]$$

approximiert wird. Man setzt nun Gl. 9.13 ein, und erhält für die Projektion der Geschwindigkeit auf die Strahlachse

$$\dot{s}(t) = c \left\{ 1 - \frac{1}{2\gamma^2} \left[ 1 + \frac{\beta^2 K^2}{2} (1 - \cos(2\omega_u t)) \right] \right\}$$

Diesen Ausdruck zerlegt man nun in die mittlere Geschwindigkeit

$$\dot{\bar{s}} = c \left\{ 1 - \frac{1}{2\gamma^2} \left[ 1 + \frac{\beta^2 K^2}{2} \right] \right\} , \quad (9.14)$$

und eine Störszillation

$$\Delta \dot{s}(t) = \frac{c\beta^2 K^2}{4\gamma^2} \cos(2\omega_u t) . \quad (9.15)$$

Die Teilchengeschwindigkeit ist also

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \beta c \frac{K}{\gamma} \sin(\omega_u t) \\ \dot{s}(t) &= \dot{\bar{s}} + \frac{c\beta^2 K^2}{4\gamma^2} \cos(2\omega_u t) \end{aligned} \quad (9.16)$$

Woraus man durch Integration (Anfangsbedingungen spielen keine Rolle) die Bahngleichungen

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{K}{k_u \gamma} \cos(\omega_u t) \\ s(t) &= \dot{\bar{s}} t + \frac{K^2}{8k_u \gamma^2} \sin(2\omega_u t) \end{aligned} \quad (9.17)$$

erhält. 'Boostet' man diese Gleichungen nun ins Ruhesystem, folgt:

$$\begin{aligned} x^r(t) &= -\frac{K}{k_u \gamma} \cos(\omega_u t) \\ s^r(t) &= \frac{K^2}{8k_u \gamma} \sin(2\omega_u t) \end{aligned} \quad (9.18)$$

Die Bahn ist in Abb. 38 skizziert.

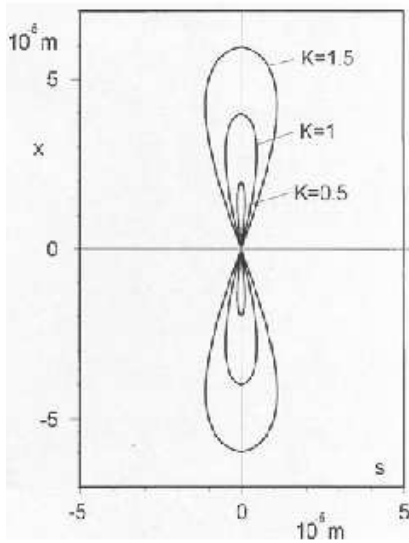


Abbildung 38: Teilchenbahn im mitbewegten System bei einer Bewegung durch einen Undulator

## 9.4 Brillanz und Leuchtdichte

Für die meisten Anwendungen von Synchrotronstrahlung ist die Intensität (pro Zeiteinheit emittierte Photonen innerhalb eines bestimmten Energieintervalls) der Strahlung eine wichtige Größe. Der dadurch definierte Fluss  $F$  ist dann

$$F = \frac{\text{Photonen}}{s \cdot 0.1\% \text{BWA}} \quad ; \quad (9.19)$$

Verwendet wurden hier die üblichen Konventionen für die Breite des Energieintervalls, 0.1% um die gewünschte Photonenenergie, und die Normierung auf ein Ampere.

Eine weitere Größe, die für bestimmte Experimente interessant ist, ist die transversale Ausdehnung und die Winkeldivergenz, des die Strahlung erzeugenden Teilchenstrahls. Je kleiner diese beiden Werte, desto "punktförmiger" ist die Strahlungsquelle. Man beurteilt die Strahlqualität deshalb nach der *Leuchtdichte* (*brightness*, Winkeldivergenz  $\sigma'_{x,y} = \sqrt{\varepsilon_{x,y}/\beta_{x,y}}$ ), oder ihrer *Brillanz* (*brilliance*, Ausdehnung und Divergenz (siehe Kap. 5.3.3/5.3.4)). Die Leuchtdichte ist durch

$$\begin{aligned} S &= \frac{F}{2\pi\sigma'_x\sigma'_z} = \frac{F\sqrt{\beta_x\beta_z}}{2\pi\sqrt{\varepsilon_x\varepsilon_z}} \\ &= \frac{\text{Photonen}}{s \cdot 0.1\% \text{BW} \text{m}^2 \text{rad}^2 \text{A}} \end{aligned} \quad (9.20)$$

definiert. Die Brillanz bezieht zusätzlich noch die transversalen Strahldimensionen ein, und wird ähnlich der Leuchtdichte als

$$\begin{aligned} B &= \frac{F}{4\pi^2\sigma_x\sigma_y\sigma'_x\sigma'_y} = \frac{F}{4\pi^2\varepsilon_x\varepsilon_z} \\ &= \frac{\text{Photonen}}{s \cdot 0.1\% \text{BW} \text{mm}^2 \text{mrad}^2 \text{A}} \end{aligned} \quad (9.21)$$

definiert. Sowohl Leuchtdichte als auch Brillanz hängen also von der Emittanz des Teilchenstrahls ab, weshalb man für hochbrillante Synchrotronstrahlungsquellen, Speicherringe mit möglichst niedriger Emittanz verwendet.

Speicherring	Energie [GeV]	Umfang [m]	hor.Emitt. $\varepsilon_h$ [nm rad]	Gütemaß $\varepsilon_h/E^2$ [nm rad / GeV <sup>2</sup> ]
SPRING-8 (Nishi Harima)	8	1436	3.4	0.053
ESRF (Grenoble)	6		3.9	0.11
PETRA-III* (DESY Hamburg)	6	2304	1	0.027
<b>ERLSYN</b>	3.5	400	1.7	0.14
APS (Chicago)	7	1104	2.4	0.17
SLS (Zürich)	2.4	288	4.4	0.76
BESSY-II (Berlin)	1.9	240	6	1.66
SPEAR-III (Stanford)	3.0	230	18	2.0
DORIS-IV (DESY Hamburg)	4.5	288	66	3.3
ANKA (Karlsruhe)	2.5	110	41	6.6
Diamond (Didcot)	3	560	2.5	0.28
Soleil (Paris)	2.5	345	3.0	0.48
ELETTRA (Trieste)	2.4	259	7	1.26
MAX-II (Lund)	1.5	90	8.8	3.9

Tabelle 3: Parameter einiger moderner Speicherringe zur Erzeugung von Synchrotronstrahlung; das Gütemaß erlaubt einen Vergleich zwischen Anlagen, die mit verschiedener Elektronenenergie laufen, je kleiner desto besser

## Literatur

- [1] LHC Website: [https://edms.cern.ch/cedar/plsql/cedarw.site\\_home](https://edms.cern.ch/cedar/plsql/cedarw.site_home)
- [2] LEP Infos: [http://sl-div.web.cern.ch/sl-div/history/lep\\_doc.html](http://sl-div.web.cern.ch/sl-div/history/lep_doc.html)
- [3] Tevatron Homepage: <http://www-bdnew.fnal.gov/tevatron/>
- [4] CERN PS Infos und Bilder: <http://psdoc.web.cern.ch/PSdoc/acc/ps/psdoc.html>
- [5] Alternating Gradient Synchrotron: <http://www.bnl.gov/bnlweb/facilities/AGS.html>
- [6] MAMI Website: <http://www.kph.uni-mainz.de/B1/>
- [7] MAMI C Entwicklung: <http://www.kph.uni-mainz.de/jb9899/1/4/document.pdf>
- [8] HERA Infos: <http://www-zeus.desy.de/public/hera.php3>
- [9] HERMES Infos: <http://www-hermes.desy.de/>
- [10] Bochumer Dynamitron Tandem: <http://www.dtl.ruhr-uni-bochum.de/>
- [11] Paul Scherrer Institut: <http://abe.web.psi.ch/>

- [12] Zyklotron Artikel: <http://epaper.kek.jp/c01/cyc2001/tableofcontents.html>
- [13] TRIUMF Infos: <http://www.triumf.info/public/about/background.html>  
und <http://ops6.triumf.ca/cycfac.htm>
- [14] *Joint Institute for Nuclear Research*: <http://www.jinr.dubna.su/>
- [15] Elektronen Stretcher Anlage der Universität Bonn:  
<http://www-elsa.physik.uni-bonn.de/>
- [16] K. Wille, *Physik der Teilchenbeschleuniger und Synchrotronstrahlungsquellen*, Teubner Stuttgart, 1996
- [17] H. Wiedemann, *Particle Accelerator Physics 1*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1993, 1999

### Übersicht Synchrotrons

*für Elektronen:*

Name	Ort	Typ	Umfang	$E_{\max}$	$B_{\text{diopl}}$	Bunchfrequenz	Luminosität	Strom	Bemerkungen	Referenz
HERA-e	DESY	$e^-/e^+$	6.3km	30GeV	5T-8T	100MHz		1A	Teil des HERA $e\bar{e}-p$ Kolliders	[8]
ELSA	Bonn	$e^-$ Stretcher	0.164km	3.5GeV	1.07T		-	→ 250mA	einer der ersten Beschleuniger mit starker Fokussierung	[15]
LEP I	CERN	$e^-/e^+$ Collider	27km	50GeV	0.1T		$2.2 \cdot 10^{31} \text{cm}^{-1} \text{s}^{-1}$			[2]
LEP II	CERN	"	"	104GeV			$10.0 \cdot 10^{31} \text{cm}^{-1} \text{s}^{-1}$	→ 12mA	abgebaut, da Tunnel für LHC gebraucht wird	[2]

*für Ionen:*

HERA-p	DESY	$p$	6.3km	920GeV	5T – 8T	8.5MHz		$\approx 60 - 100 \text{mA}$	Teil des HERA $e\bar{e}-p$ Kolliders	[8]
PS	CERN	$p$ -Synchrotron	200m	28GeV					Vorbeschleuniger für LHC	[4]
SPS	CERN	"	7km	400GeV					Entdeckung $W^+, W^-, Z$ – Bosonen	[?]
LHC	CERN	$p, \bar{p}$ , Ionen-Collider	27km	7TeV	8.3T		$0.015 \cdot 10^{34} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$	9mA	<i>first light</i> voraussichtlich 2007	[1]
Tevatron	Fermilab	$p/\bar{p}$ Collider	7km	$\approx 1 \text{TeV}$	4.2T		$5.5 \cdot 10^{31} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$	20mA	zur Zeit stärkster Beschleuniger weltweit	[3]

Tabelle 4: Übersicht wichtiger Beschleunigeranlagen